الجمهوريّة العربيّة السوريّة
وزارة التربية
المركز الوطني لتطوير المناهج التربويّة



الهندسة

كتاب الطالب

الصفّ الأوّل الثّانوي

2016 - 2017 م

1437 هـ

حقوقُ التّأليفِ والنَّشرِ محفوظةٌ

لوزارةِ التَّربيةِ في الجُمهوريَّةِ العربيَّةِ السّوريَّة



حقوقُ الطّبعِ والتّوزيعِ محفوظةٌ

للمؤسّسةِ العامّةِ للطّباعةِ

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ 2013 - 2014 م

المؤلّفون

أ.د. عمران قوبا	ميكائيل الحمود
بسام بركات	مروان بركة
شحادة آله رشي	غدير اندراوس
عصام علي	محمد ناصر
أماني حسن	

خطة توزيع المنهاج

الشهر	المادة	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول	جبر			مجموعات الأعداد	العبارات الجبرية
	هندسة			التحويلات المألوفة	التحويلات المألوفة
تشرين أول	جبر	المعادلات الجبرية	الترتيب مجموعة الأعداد الحقيقية	الترتيب مجموعة الأعداد الحقيقية	تمرينات ومسائل
	هندسة	أثر التحويلات الهندسية على التحويلات المألوفة	الخواص المشتركة للتحويلات المألوفة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
تشرين ثاني	جبر	تمرينات ومسائل	مفهوم التابع العددي	الخط البياني لتابع	التابع المتزايد والتابع المتناقص
	هندسة	رسم المجسمات بالمنظور	قواعد التلاقي التوازي في الفراغ	التعامد في الفراغ	تمرينات ومسائل
كانون أول	جبر	جدول اطراد تابع	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
	هندسة	تمرينات ومسائل	الأشعة والمساواة الشعاعية	الأشعة جمع وطرحها	جمع الأشعة وطرحها
كانون ثاني	جبر	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			حل معادلة من الدرجة الثانية
	هندسة	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			ضرب شعاع بعدد حقيقي
شباط	جبر	تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته	العلاقة بين أمثال وجذور ثلاثي حدود من الدرجة الثانية	تطبيقات ونشاطات	تمرينات ومسائل
	هندسة	الارتباط الخطي لشعاعين	مقدمة في الهندسة التحليلية	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
آذار	جبر	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	التوابع الحدودية من الدرجة الثانية	تابع المقلوب
	هندسة	معادلة المستقيم	جمل المعادلات الخطية	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
نيسان	جبر	المستقيم الحقيقي والدائرة المثلثية	النسب المثلثية لعدد حقيقي	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
	جبر	عناصر الاحتمال	قانون الاحتمال	قانون الاحتمال	تمرينات ومسائل
أيار	جبر	تمرينات ومسائل	مراجعة عامة		
	جبر	تمرينات ومسائل	مراجعة عامة		

مقدّمة

تُقدّمُ الرّياضياتُ الأدواتِ لنمذجةِ الظّواهرِ وللتّنبُّؤِ بالنّتائجِ، وخصوصاً في مجالات العلوم التجريبيّةِ والتّقانية، وذلك لأنّها تتيح تطوير العديد من عناصر المعرفة. فهي تتغذّى على المسائل التي تنشأ من السعي وراء تحقيق فهمٍ أفضل للعالم المحيط بنا. كما إنّ تطوّرها مرتبط في الوقت نفسه، وإلى حدٍّ كبير، بقدرة الإنسان على استكشاف المفاهيم النظرية العميقة.

ونجد في تاريخ البشريّة نقاطاً مضيئة تشير إلى قدرة الإنسان على اصطناع الأدوات التي تتيح له تحقيق فهم أفضل للعالم المحيط به، وتسمح له أن يكون مؤثراً تأثيراً أكثر فعالية في محيطه. منذ البدء كانت الرّياضيّات، إلى جانب اللّغة، واحدة من الحوامل الرئيسة للجهد الذي بذله الإنسان في وضع المفاهيم الأساسيّة. لذلك يُنتظر من طلابنا في نهاية مرحلة دراستهم ما قبل الجامعيّة، أن يكونوا قد اكتسبوا المبادئ الأساسيّة للتّفكير الرياضياتي، وهي تعتمد على كمٍّ معرفيّ جيِّد، ودراية بطرائق حلّ المسائل، وبأساليب البرهان المعتمِد على الاستنتاج المنطقي، دون أن يكون ذلك بالضرورة مقترِناً بدراسةِ ما يُعرّف باسم المنطق الرّياضيّ.

تحتفظ الرّياضيّات بعلاقاتٍ وثيقة مع العلوم الأخرى والتّقانة، إذ تُتيح لغة الرّياضيّات وصف ظواهر الطّبيعة ونمذجتها، وهي تتمايز عنها لأنّ الرّياضيّات تؤلف بحدّ ذاتها فرعاً ذا هويَّة خاصَّة مستقلة.

ويحتلّ الإثباتُ المعتَمِدُ على الاستنتاج الرّياضي موقعاً أساسيّاً في الرّياضيّات، إذْ لا يكفي التيقُّن من صحة الخواصِّ اعتماداً على بعض الأمثلة. يقود تعليم الرّياضيّات

وتعلُّمها الطّلاب إلى تذوق ذلك الشّعور الرّائع الذي يشعر به المرء عند إثبات صحّة قضيةٍ بالبرهان القاطع اعتماداً على المناقشة المنطقيّة. مُمارسةُ الرّياضيّات هي امتلاك ناصيتها اعتماداً على الخيال والبحث، والتّحسُّسِ والاستكشافِ والشعورِ بمتعة الاكتشاف، وحلّ المسائل بدقّة ومنطق.

لقد سعينا في هذا الكتاب، إلى تقديم أداة تعليمٍ للرّياضيّات، يمكن أن تُستَعْمَل أيضاً وفي الوقت ذاته، أداةَ تعلّمٍ ذاتيّ. ننصح أنْ يكون الكتاب أداة العمل الرّئيسة، فتجري قراءةُ فقراتِ الدّرس من الكتاب، ومناقشةُ الطّلاب في فحوى ما يُقرأ، حيث يؤدّي المُدرِّس دور مدير الحوار والنّقاش الّذي من المفترض أن يُؤدّي إلى فهمٍ أعمقَ للدّرس، ويُطلب من الطّلاب حلُّ التّدريبات مع تقدّم الدّرس.

ولمّا كان تعلّم طرائق الاستكشاف والبحث هدفاً أساسيّاً من أهدافنا، فقد زوّدنا كلَّ بحث بعدد من المسائل والتّمرينات التي جرى فيها توجيه تفكير الطّالب نحو الحلّ، آملين تمكين الطّالب من طرائق التّفكير العلمي الّتي يفيده اتّباعُها أياً كانت أنماط المسائل التي تواجهه مستقبلاً.

وأخيراً، نرجو من الزّملاء المدرّسين ومن الأعزّاء الطّلاب أن يزوّدونا بأيّ ملاحظةٍ أو انتقادٍ بنّاءَين على فحوى أو طرائق هذا الكتاب حتى تُؤخذ في الحُسبان.

المُعدّون

المحتوى

1

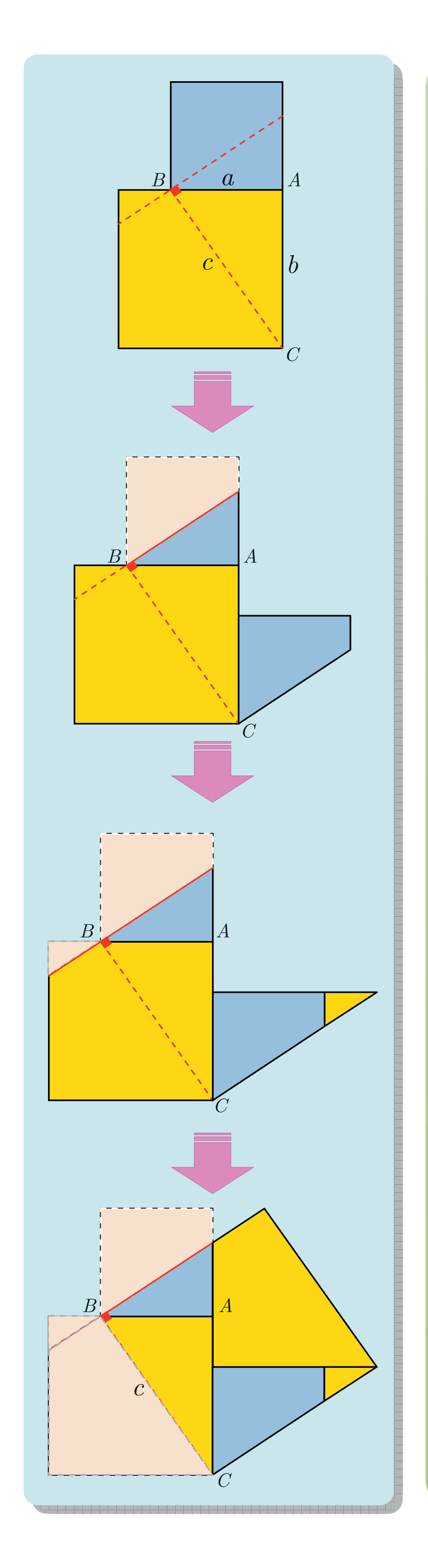
التحويلات الهندسيّة في المستوي

1. التّحويلاتُ المألوفةُ في المستوي
2. أثرُ التّحويلاتِ الهندسيّةِ على الأشكالِ المألوفة
3. الخواصُّ المشتركةُ للتّحويلاتِ المألوفة

لقد كان كتابُ «عناصر الهندسة» لإقليدس (300 قبل الميلاد) واحداً من أهمِّ النصوصِ القديمةِ في الهندسة، حيثُ عرضَ فيه الهندسةَ انطلاقاً من موضوعاتٍ أساسية، وأطلقَ ما يُعرفُ اليومَ باسم الهندسةِ الإقليدية.

في القرن السّابع عشر، وقع تطوُّران أساسيّان في مجال الهندسة، الأوّل هو اختراع ديكارت **Descartes** وفِرما **Fermat** الهندسةَ التحليليّة، والثاني هو الدراسة المنهجية للهندسة الإسقاطيّة من قبل دوزارغ **Desargues**.

وفي نهاية القرن التّاسع عشر اقترح كلاين **Klein**، منهجيّةً جديدةً تنصّ على دراسة الهندسة انطلاقاً من التحويلات الهندسيّة، بدلاً من الأشكال. تأمّلِ الشّكلَ المجاورَ وانظرْ كيف تُبَرهَنُ مُبرهَنَةُ فيثاغورث في المثلّث القائمِ اعتماداً على الانسحابات، وعيّن عند الانتقال من شكل إلى الذي يليه الانسحابَ المطبَّق والجزءَ من الشّكل الّذي طُبّق عليه هذا الانسحاب.

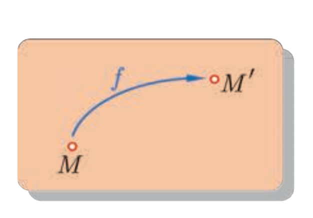


1

التّحويلاتُ الهندسيّةُ في المستوي

1 التّحويلات المألوفة في المستوي

سنطلق في هذا الفصل تسمية **تحويل مألوف** على كل من التحويلات الهندسية الآتية : **التّناظر المحوريّ** (ويسمّى أيضاً انعكاساً) و**التّناظر المركزيّ** و**الانسحاب** و**الدوران**، ولقد مررتَ بها في دراستك السّابقة، لذلك نهدف في هذا الفصل إلى تثبيت الأفكار المتعلّقة بها.



ليكن f تحويلاً مألوفاً في المستوي، يقرن هذا التّحويل بكل نقطةٍ M من المستوي نقطةً M' تسمّى صورةَ M وفق f. وبالعكس، تكون كلُّ نقطةٍ N في المستوي صورةَ نقطةٍ M وفق f. نرمز إلى هذا التّحويل بالرّمز $f : M \mapsto M'$ أو $M' = f(M)$.



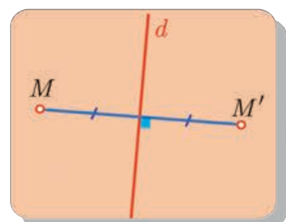
التّناظرُ المحوريُّ (الانعكاس)



تعريف



ليكن d مستقيماً. **الانعكاس** S_d الذي محوره d هو التحويل الذي يقرن بنقطة M من المستوي النّقطة M' المعرّفة كما يأتي :

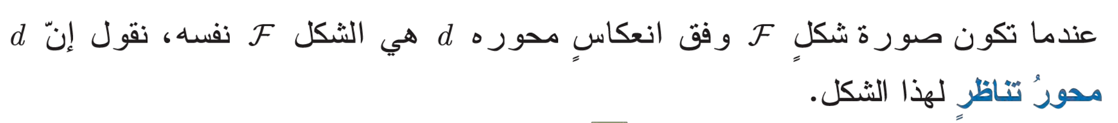


- إذا كانت M غيرَ واقعة على المستقيم d، كان d محورَ القطعةِ المستقيمة $[MM']$.
- وإذا كانت M واقعة على المستقيم d كان $M = M'$.



فكّر

- إذا كانت النّقطةُ M' صورةَ نقطة M وفق انعكاسٍ محوره d، فما هي صورةُ النّقطة M' وفق هذا الانعكاس ؟
- إذا كان Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ I وكانا متناظرين بالنسبة إلى مستقيمٍ d، فلماذا تقع النّقطة I على المستقيم d ؟

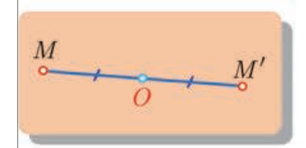


عندما تكون صورة شكلٍ $\mathcal{F}$ وفق انعكاسٍ محوره d هي الشكل $\mathcal{F}$ نفسه، نقول إنّ d **محورُ تناظر** لهذا الشكل.

التّناظرُ المركزيُّ



تعريف



لتكن O نقطة من المستوي، **التّناظر** S_O الذي مركزه O هو التّحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي، مختلفة عن O، النّقطة M' التي تجعل النّقطة O منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$.

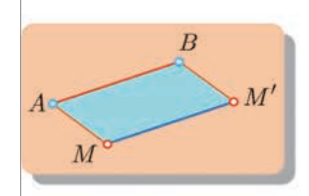
صورة النّقطة O وفق هذا التناظر هي النّقطة O نفسُها.

الانسحاب



تعريف

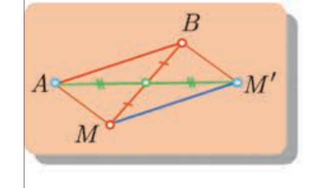




لتكن A و B نقطتين في المستوي، نعرّف **الانسحاب** $T_{A\to B}$ بأنّه التّحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي النّقطةَ M' التي تجعل الرباعي $AMM'B$ متوازي الأضلاع.

فكّر





في التعريف السابق افترضنا أنّ النّقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة. يمكننا أن نضع تعريفاً يأخذ هذه الحالة في الحسبان بأن نقول أنّ M' هي نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، علّل ذلك ؟

الدّورانُ



تعريف



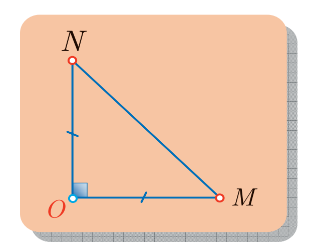
لتكن O نقطةً من المستوي، **الدّوران** $\mathcal{R}_{O,\theta}$ الذي مركزه O وزاويتُه θ هو التحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي، مختلفة عن O، النّقطة M' التي تحقق : $OM' = OM$ و $\angle MOM' = \theta$.

وتكون صورة النّقطة O وفق هذا الدوران هي النّقطة O نفسها.



نسمّي الاتّجاه المبيّن في الشّكل اتّجاهاً مباشراً، نسمّي **ربع دورة** كلّ دوران زاويته $\pm 90°$. يتوافقُ الاتجاه **المباشر** للدوران مع **عكس اتّجاه دوران عقارب السّاعة** $(\theta > 0)$. ويكون اتّجاه الدّوران غير مباشر إذا كان متّفقاً مع اتّجاه دوران عقارب السّاعة $(\theta < 0)$.



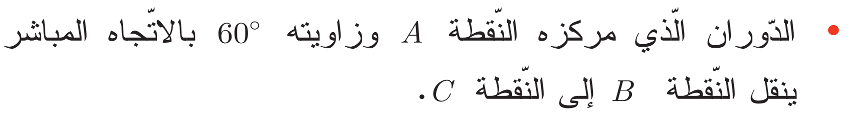


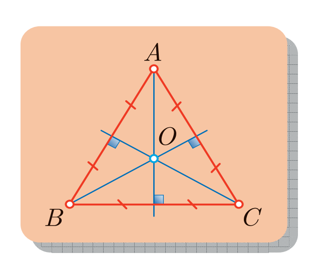
- إذا كانت النّقطة N هي صورة M وفق ربع دورة مركزها نقطة O، فإنّ MON هو مثلّث قائم الزاوية ومتساوي السّاقين رأسه O.

- في المربع $ABCD$ الذي مركزه O :
  - ربع دورة مباشرة مركزها النّقطة A تنقل النّقطة B إلى D.
  - ربع دورة مباشرة مركزها النّقطة O تنقل النّقطة A إلى B.



- في المثلّث المتساوي الأضلاع ABC الذي مركزه O :
  - الدّوران الّذي مركزه النّقطة A وزاويته $60°$ بالاتّجاه المباشر ينقل النّقطة B إلى النّقطة C.





  - الدّوران الذي مركزه النّقطة O وزاويته $120°$ بالاتّجاه المباشر ينقل النّقطة B إلى النّقطة C أيضاً.



① عيّن المقولات الصحيحة فيما يأتي وعلل إجاباتك :

❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر.

❷ إذا كانت صورة نقطة B وفق الانسحاب $T_{I \to J}$ هي النّقطة C، كانت القطعتان المستقيمتان $[BJ]$ و $[IC]$ متناصفتين.

❸ إذا كانت C و C' دائرتين مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ولهما نصف القطر نفسه وكانتا متقاطعتين في نقطتين A و B، كان المستقيمان (OO') و (AB) محوري تناظر للشّكل المكوّن من الدّائرتين.

❹ إذا كانت N صورة نقطة M وفق دورانٍ مركزه O وزاويته $60°$ كان المثلّث MON متساوي الأضلاع.

② ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A، وليكن I منتصف القطعة $[BC]$. نرمز بالرّمز S_I إلى التّناظر الذي مركزه I.

❶ أنشئ صورة المثلّث ABC وفق التّحويل S_I.

❷ لتكن A' صورة A وفق S_I. ما طبيعة الرباعيّ $ABA'C$ ؟

أثرُ التّحويلاتِ الهندسيّةِ على الأشكالِ المألوفة

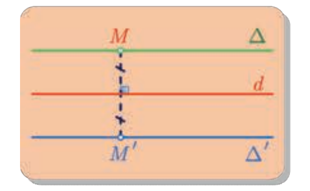
صورة مستقيم

بوجه عام صورة مستقيم وفق انعكاس أو تناظر مركزيّ أو انسحاب أو دوران هي أيضاً مستقيم.

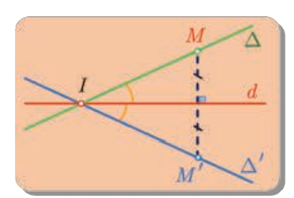
ويمكننا أن نكون أكثر تحديداً في بعض الحالات الخاصّة، كما نوضّح فيما يأتي :

① حالة الانعكاس أو التّناظر المحوريّ

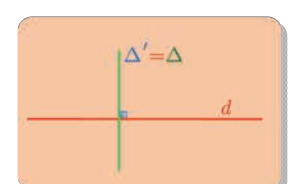
ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الانعكاس S_d عندئذ نميّز الحالات الآتية :



- إذا كان $d \parallel \Delta$ كان $d \parallel \Delta'$ أيضاً.



- وإذا تقاطع Δ مع d في I مرّ المستقيم Δ' من I أيضاً وكان d منصّف الزّاوية التي يصنعُها المستقيمان Δ و Δ'.

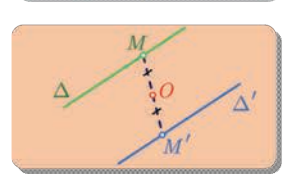


- وإذا كان $d \perp \Delta$ كان $\Delta' = \Delta$.

② حالة التّناظر المركزيّ أو الانسحاب

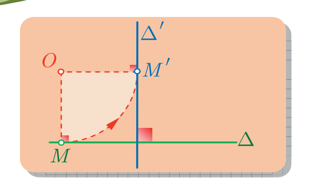
Δ Δ' M' B M A

ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A \to B}$ أو التّناظر المركزيّ S_O عندئذ يكون $\Delta \parallel \Delta'$.



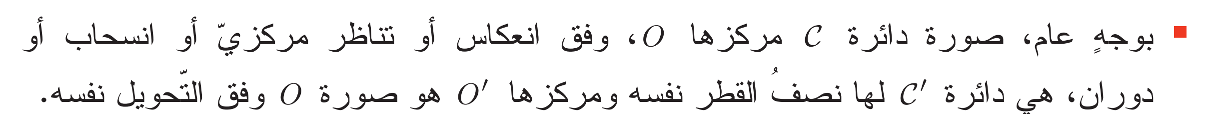
في حالة التّناظر المركزيّ S_O، صورةُ مستقيم Δ مارٍّ بمركز التّناظر O هي المستقيمُ Δ نفسه.

1



③ حالة الدّوران بربع دورة

ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الدّوران ربع دورة $\mathcal{R}$ حول O
عندئذ يكون $\Delta \perp \Delta'$.



صورةُ دائرة، وصورةُ قطعة مستقيمة

- بوجهٍ عام، صورة دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O، وفق انعكاس أو تناظر مركزيّ أو انسحاب أو دوران، هي دائرة $\mathcal{C}'$ لها نصفُ القطر نفسه ومركزها O' هو صورة O وفق التّحويل نفسه.

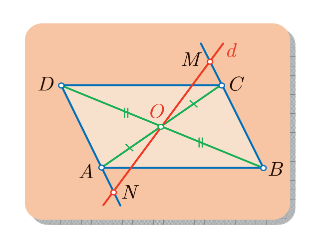
- صورة قطعة مستقيمة، وفق انعكاس أو تناظر مركزي أو انسحاب أو دوران، هي قطعة مستقيمة لها الطّول نفسه.

صورةُ نقطة تقاطع مستقيمين

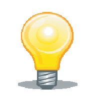
ليكن d و Δ مستقيمين متقاطعين في M. وليكن d' و Δ' صورتي هذين المستقيمين بالتّرتيب وفق واحدٍ من التّحويلات المألوفة. عندئذ يتقاطع d' و Δ' في M' هي صورة النّقطة M وفق التّحويل نفسه.



مثال إثبات أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن d مستقيماً ماراً بالنّقطة O ويقطع (BC) في النّقطة M، ويقطع (AD) في النّقطة N. أثبت أنّ $AN = CM$.

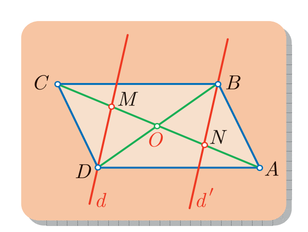


لإثبات تَساوي طول قطعتين مستقيمتين، نبرهن أنّ إحداهما صورةُ الأخرى وفق تحويلٍ مألوف.

الحل

إنّ متوازي الأضلاع $ABCD$ وأقطاره شكلٌ نموذجيٌّ للتّناظر المركزيّ S_O، ونعلم أنّ $S_O(B) = D$ وأنّ $S_O(C) = A$. نستنتج من ذلك أنّ صورةَ المستقيم (BC) هي المستقيمُ (AD).
ولمّا كان المستقيمَ d يمرّ بالنّقطة O فإنّ صورته وفق S_O هي المستقيم d نفسه.
النّقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين (BC) و d، ومن ثمّ تكون صورتها وفق S_O نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و d أي النّقطة N. ولمّا كان $S_O(M) = N$ و $S_O(C) = A$ كانت صورة القطعة المستقيمة $[CM]$ هي القطعة المستقيمة $[AN]$. إذن $CM = AN$.

مثال إثبات أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن d مستقيماً ماراً بالنّقطة D ويقطع القطعة المستقيمة $[AC]$ في M، وليكن d' مستقيماً مارّاً بالنّقطة B موازياً للمستقيم d. المستقيم d' يقطع القطعة المستقيمة $[AC]$ في N.

❶ أثبت أنّ d' هو صورة d وفق التّناظر المركزيّ S_O الذي مركزه O.

❷ أثبت أنّ O هي منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$.



إذا كان f انسحاباً أو تناظراً مركزيّاً وكان $f(G) = G'$ كانت صورةُ أيّ مستقيم d مارٍّ بالنّقطة G هي المستقيمُ الذي يمرّ بالنّقطة G' موازياً d.

الحل

❶ ليكن S_O التّناظر المركزيّ الذي مركزه O، نعلم أنّ $S_O(D) = B$، وعليه فإنّ صورة المستقيم d المارّ بالنّقطة D وفق S_O هي المستقيم المارّ بالنّقطة B موازياً للمستقيم d أي d'.

❷ نعلم أنّ صورة المستقيم (AC) المارّ بالنّقطة O وفق S_O هي المستقيم (AC) نفسه. النّقطة M هي نقطة تقاطع القطعة المستقيمة $[AC]$ مع المستقيم d، إذن صورة هذه النّقطة وفق S_O هي نقطة تقاطع المستقيم (AC) مع المستقيم d'، أيْ إنّها النّقطة N. ولمّا كانت N هي صورة M وفق تناظر مركزه O فإنّ المركز O يقع في منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$.

تدرّب

① ليكن المثلّث ABC. أنشئ النّقطة C' صورة النّقطة C وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to B}$ أي الّذي ينقل A إلى B. لماذا تكون أيضاً النّقطة C' صورةَ النّقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$؟

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع. وليكن H المسقط القائم للنقطة A على القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب الذي شعاعه $\mathcal{T}_{A\to H}$.

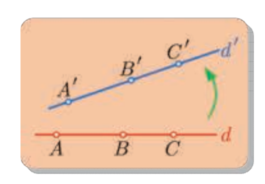
③ ليكن AOC مثلّثاً متساوي الأضلاع، طول ضلعه $2\,\text{cm}$. ولتكن B نظيرة النّقطة O بالنسبة إلى النّقطة A. أنشئ صورة المثلّث AOC وفق الانسحاب الذي شعاعه $\mathcal{T}_{B\to C}$.

④ لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، وليكن d مستقيماً مماسّاً لها في النّقطة A. أنشئ الدّائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق الانعكاس الّذي محوره d.

3 الخواصُّ المشتركةُ للتّحويلاتِ المألوفة

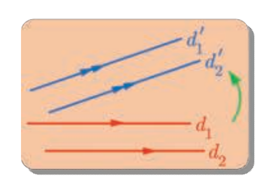
تشترك التّحويلات المألوفة من الانعكاس والتّناظر المركزيّ والانسحاب والدّوران بالخواصّ الآتية :

① المحافظة على خاصّة الوقوع على استقامةٍ واحدة



صورة مستقيم هي مستقيم أيضاً، فإذا كانت A و B و C ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وقعت صورها A' و B' و C' أيضاً على استقامة واحدة.

② المحافظة على توازي المستقيمات

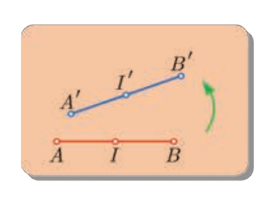


إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 متوازيين، كانت صورتاهما d'_1 و d'_2 متوازيتين. ينتج من ذلك أنّ صورة متوازي الأضلاع هي أيضاً متوازي الأضلاع.

③ المحافظة على المسافات والمساحات

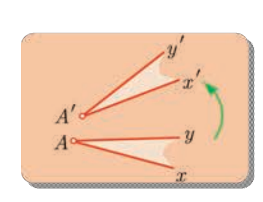
- صورة مثلّث هي مثلّث طبوق عليه.
- صورة منطقة $\mathcal{D}$ هي منطقة $\mathcal{D}'$ لها المساحة نفسها.

④ المحافظة على منتصف قطعة مستقيمة



لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة، ولتكن $[A'B']$ صورة هذه القطعة وفق تحويل مألوف. عندئذ تكون صورة النّقطة I منتصف $[AB]$ هي النّقطة I' منتصف القطعة المستقيمة $[A'B']$.

⑤ المحافظة على قياس الزّوايا

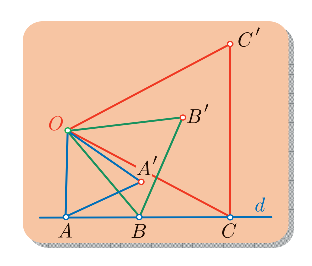


قياس زاوية $\widehat{xAy}$ يساوي قياس صورتها $\widehat{x'A'y'}$. وبوجهٍ خاص، عندما يكون مستقيمان d و Δ متعامدين تكون صورتاهما d' و Δ' متعامدتين أيضاً. نقول إنّ التّحويلات المألوفة تحافظ على التّعامد.

يمكننا مثلاً أن نستخلص مما سبق النتائج الآتية :

- صورة معيّن هي معيّن أيضاً.
- صورة مستطيل هي مستطيل أيضاً.
- صورة مربّع هي مربّع أيضاً.

مثال إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



لتكن A و B و C ثلاثُ نقاط من مستقيمٍ d، ولتكن O نقطة غير واقعة على d، ولتكن AOA' و BOB' و COC' مثلّثات متساوية الأضلاع متوضعة في المستوي كما في الشكل المجاور.

أثبت أنّ النّقاط A' و B' و C' واقعة على استقامة واحدة.

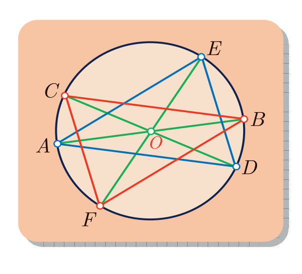


لبرهان وقوع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة نبرهن أنّ هذه النّقاط هي صور ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وفق تحويلٍ مألوف.

الحل

المثلّثات المتساوية الأضلاع هي أشكالٌ نموذجيّة مرتبطة بالدّوران. تشترك المثلّثات AOA' و BOB' و COC' بالرأس O، لذلك يبدو من الحكمة أن نستعمل الدّوران R الذي مركزه O وزاويته $60°$ بالاتّجاه المباشر. ينقل هذا التّحويل النّقطة A إلى A'، و B إلى B'، وكذلك C إلى C'. النّقاط A و B و C تقع على d فهي على استقامة واحدة، إذن، تقع النّقاط A' و B' و C' على استقامة واحدة.


مثال إثبات أنّ لمثلّثين المساحة ذاتها



لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، ولتكن $[AB]$، $[CD]$، $[EF]$ ثلاثة أقطار لهذه الدّائرة، متوضّعة كما في الشّكل المجاور. أثبت أن للمثلّثين AED و CFB مساحتين متساويتين.



لإثبات أنّ للمثلّثين AED و CFB مساحتين متساويتين، نثبتُ أنّ أحد هذين المثلّثين هو صورة المثلّث الآخر وفق تحويلٍ مألوف، فيكون المثلّثان طبوقين، (ولهما من ثَمّ المساحة نفسها).

الحل

بتفحّص الشكل نجد أنّ النّقطة O هي منتصف القطع المستقيمة $[AB]$، $[CD]$، $[EF]$. تقودنا هذه الملاحظة إلى استعمال التّناظر المركزيّ S_O الّذي مركزه النّقطة O. هذا التّناظر ينقل النّقطة A إلى B وينقل النّقطة D إلى C كما ينقل النّقطة E إلى F؛ وبذا تكون صورة المثلّث ADE وفق التّناظر S_O هي المثلّث BCF. نستنتج من ذلك أنّ هذين المثلّثين طبوقان ومن ثمّ تكون لهما المساحة ذاتها.



① ليكن المربّع $ABCD$، ولتكن النّقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المربّع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to I}$ الذي ينقل A إلى I.

② ليكن المثلّث ABC، وليكن G مركز ثقله.

❶ أنشئ G' صورة النّقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$ الذي ينقل A إلى G.

❷ ▲ لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أتكون I منتصف القطعة $[GG']$؟

▲ استنتج طبيعة الرّباعيّ $BGCG'$.

③ ليكن d و Δ مستقيمين متعامدين، ولتكن A نقطة واقعة على المستقيم Δ. أنشئ رباعيّاً $ABCD$ يكون المستقيمان d و Δ محوري تناظر له.

④ ليكن $OABC$ مستطيلاً فيه OA يساوي $8\,\text{cm}$ و OC يساوي $6\,\text{cm}$. وليكن $\mathcal{R}$ ربع دورة مباشرة مركزها O.

❶ أنشئ النّقاط C' و A' و B' صور النّقاط C و A و B وفق التّحويل $\mathcal{R}$ بالتّرتيب.

❷ ▲ بيّن أنّ المثلّث OBB' قائم ومتساوي الساقين.

▲ استنتج أنّ BB' يساوي $10\sqrt{2}$ سنتيمتراً.

⑤ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين رأسه A، وليكن d محور تناظره. نرسم من B العمود على المستقيم (AB) فيقطع d في نقطة E.

❶ ما هي صورة المستقيم (BE) وفق الانعكاس الذي محوره d ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمين (EC) و (AC) متعامدان.

⑥ لتكن A و B نقطتين على الدّائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O، تُحقّقان $\angle AOB = 90°$. ليكن $\mathcal{R}$ دورانا مباشراً مركزه O وزاويته $60°$.

❶ أنشئ النّقطة C صورة النّقطة B وفق $\mathcal{R}$.

❷ احسب قياسات زوايا المثلّث ABC.

ملاحظة : في هذا التّمرين هناك حالتان.

تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

❶ أنشئ صورة $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ الذي ينقل O إلى D.

❷ إنّ صورة $ABCD$ وفق $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي أضلاع، أثبت أنّ D مركزه.

2 ليكن لدينا المثلّث ABC، والنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. لتكن J نظيرة النّقطة B بالنّسبة إلى النّقطة A.

❶ أنشئ النّقطة K صورة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$ الذي ينقل A إلى C.

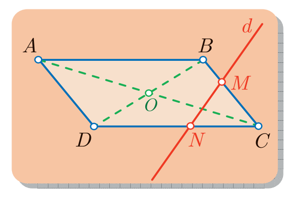
❷ ما هي صورة النّقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ ؟

3 ليكن Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ O، وليكن d و d' منصّفي الزاويتين المكوَّنتين بهذين المستقيمين، وأخيراً لتكن M نقطة واقعة على المستقيم Δ.

❶ أنشئ النّقطة N صورة النّقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d، والنّقطة P صورة النّقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d'.

❷ علّل كون المثلّث PMN قائم الزّاوية.

4 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. d مستقيمٌ متوضّعٌ كما في الشّكل المجاور، ويقطع القطعة المستقيمة $[CD]$ في N، كما يقطع القطعة المستقيمة $[BC]$ في M. ليكن S_O التناظر الذي مركزه O.



❶ أنشئ النقطتين M' و N' صورتي النقطتين M و N وفق S_O بالتّرتيب.

❷ استنتج أنّ المستقيم $(M'N')$ يوازي المستقيم d.

5 ليكن ABC مثلّثاً متساوي السّاقين رأسه A، وليكن H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$، ولتكن M نقطة من $[AH]$ مختلفة عن A وعن H. يقطع المستقيمُ (BM) المستقيمَ (AC) في I، ويقطع المستقيمُ (CM) المستقيمَ (AB) في J. ليكن S الانعكاس الذي محوره (AH).

❶ ▲ علّل كون المستقيم (CJ) صورة المستقيم (BI) وفق الانعكاس S.

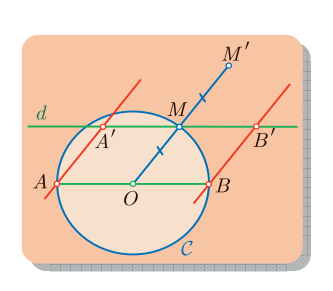
▲ ما صورة المستقيم (AC) وفق S ؟

▲ استنتج أنّ $S(I) = J$.

❷ علّل كون الرّباعيّ $BJIC$ شبه منحرف متساوي السّاقين.

لنتعلّم البحث معاً

6 تعرّفُ التّحويلات



C دائرة مركزها O و $[AB]$ أحد أقطارها. M نقطة واقعة على C مختلفة عن A وعن B. d مستقيمٌ يمر بالنّقطة M موازياً المستقيم (AB). نرسم من A و B مستقيمين يوازيان المستقيم (OM) فيقطعان المستقيم d في A' و B' على الترتيب. لتكن M' صورة O وفق التّناظر الذي مركزه M. أثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ مثلّثٌ قائم.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة.

- $\widehat{AMB} = 90°$ لماذا ؟
- يوازي المستقيمُ d المستقيمَ (AB) والمستقيمات (AA') و (BB') و (OM) متوازية أيضاً، وهذا يشكّل متوازيات أضلاع يمكن أن نربطها بانسحابات. وهناك أيضاً قطعاً مستقيمة متساوية الطّول. أشر إلى ذلك على الشّكل، واكتب حالات المساواة هذه.

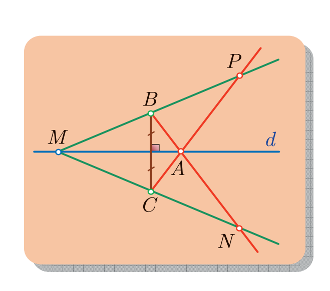
بحثاً عن طريق. المطلوب إثبات أنّ المثلّث $A'M'B'$ قائم. تقودنا الاستنتاجات السّابقة إلى طريقتين للحلّ.

الطريقة الأوّلى. استفد من الانسحاب لتثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ هو صورة مثلّث وفق انسحاب. ما هو هذا المثلّث ؟ ما هو الانسحاب ؟

الطريقة الثانية. استفد من القطع المستقيمة المتساوية الطول.

أنجزِ الحلّ في الحالتين واكتبه بلغةٍ سليمة.

7 صورة تقاطع مستقيمات



d محور قطعة مستقيمة $[BC]$. A و M نقطتان واقعتان على d نفترض أنّ المستقيمين (AB) و (CM) يتقاطعان في N، وأنّ المستقيمين (AC) و (BM) يتقاطعان في P. أثبت أنّ النقطة P هي صورة النّقطة N وفق الانعكاس الذي محوره d.

نحو الحلّ

رسم الشكل. ارسم الشكل مسمياً عليه النقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائجَ مباشرة.

- تقع النّقطتان A و M على محور القطعة المستقيمة $[BC]$. اكتب علاقات المساواة بين أطوال القطع المستقيمة في هذه الحالة وبيّن ذلك على الشّكل.
- المستقيم d هو محور تناظر لكلٍّ من المثلّثين ABC و MBC. علّل ذلك.

بحثاً عن طريق. تقودنا الاستنتاجات السّابقة إلى الحلّ. النّقطة N هي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CM)، وماذا عن P ؟ استعن بالخاصّة المناسبة من الدرس.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

8 استعمال التعاريف

ABC مثلّثٌ متساوي السّاقين، M نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، N صورة النّقطة M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$ الذي ينقل B إلى C، و P صورة النّقطة M وفق الدوران المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه A والذي ينقل النّقطة B إلى C. أثبت أنّ المثلّث PCN متساوي السّاقين.

نحو الحلّ

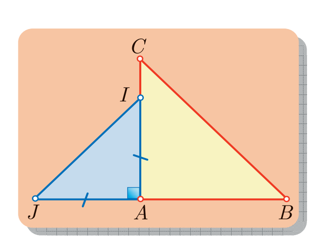
رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن طريق.

- N هي صورةُ M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$. يوافق هذا الانسحاب متوازي أضلاع يُطلب تحديده. حدّد على الشكل القطع المستقيمة المتساوية الطّول واكتب علاقات المساواة الموافقة.
- P هي صورة M وفق الدّوران $\mathcal{R}$. يفيد تعريف الدّوران بتحديد علاقات مساواة على الشّكل: زوايا متساوية، وقطع مستقيمة متساوية الطول أيضاً. حدّد هذه العلاقات على الشكل واكتبها.
- النّقطة C هي صورة النّقطة B وفق $\mathcal{R}$، إذن : $\mathcal{R}(B) = C$ و $\mathcal{R}(M) = P$. عند معرفة نقطتين وصورتيهما وفق تحويل، من المفيد أن نصل بينهما وأن نكتب علاقات تساوي الأطوال التي يمكن استنتاجها. صِل بين النّقطتين B و M وكذلك بين P و C. أيُّ النتائج تبرّر صحّة المساواة $BM = PC$ ؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

9 استعمال ربع الدورة



ABC مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين رأسه A، I نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، IAJ مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين في A والنّقطة J تقع خارج القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمين (BI) و (CJ) متعامدان.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

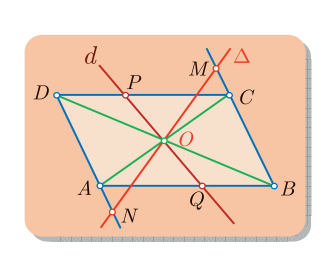
بحثاً عن نتائج مباشرة.

يرتبط المثلّثان BAC و IAJ بتحويل ربع دورة مركزه النّقطة A. فإذا كان $\mathcal{R}$ تحويل ربع دورة مباشر مركزه A، ما صورة النّقطة B؟ وما صورة النّقطة I ؟

بحثاً عن طريق. تبيّن الاستنتاجات السابقة ملامحَ منهجٍ للإجابة عن السّؤال المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

10 تعرُّف التّناظر المركزيّ



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، d مستقيمٌ مارّ بالنّقطة O ويقطع المستقيم (DC) في P ويقطع المستقيم (AB) في Q، Δ مستقيمٌ مار بالنّقطة O ويقطع المستقيم (AD) في N ويقطع المستقيم (BC) في M. أثبت أنّ الرّباعيّ $MPNQ$ متوازي الأضلاع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

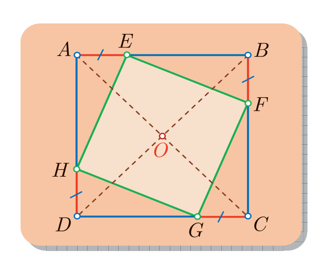
بحثاً عن نتائج مباشرة. يطرح وجودُ متوازي الأضلاع مع أقطاره فكرة الاستفادة من التّناظر S_O الذي مركزه O.

- ما هي صورة كلٍّ من النقاط A و B و C و D وفق التناظر S_O ؟
- ما صورة كلٍّ من المستقيمين d و Δ وفق S_O ؟
- ما صورة كلٍّ من المستقيمين (BC) و (CD) وفق S_O ؟

بحثاً عن طريق. تُوجّهنا الاستنتاجات السّابقة نحو محاولة إثبات أنّ النّقطة O هي منتصف كلٍّ من القطعتين المستقيمتين $[MN]$ و $[PQ]$. ولكنّ النّقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين Δ و (BC). عيّن صورة M وفق S_O.

أنجِزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

11 استعمال الدوران



ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. نتأمّل على القطعة المستقيمة $[AB]$ نقطة E، وعلى القطعة المستقيمة $[BC]$ نقطة F، ونقطة G على القطعة المستقيمة $[CD]$، ونقطة H على القطعة المستقيمة $[AD]$ بحيث يكون $AE = BF = CG = DH$. أثبت أنّ $EFGH$ مربّع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة.

- بيّن لماذا يكون: $EB = FC = GD = HA$؟
- تبدو المثلّثات EBF و FCG و GDH و HAE طبوقة. أثبت ذلك.

بحثاً عن طريق. نريد إثبات أنّ الرباعي $EFGH$ مربّعٌ. توحي الاستنتاجات السّابقة بطريقتين ممكنتين للوصول إلى الحل.

الطريقة الأوّلى. وهي تعتمد على المثلّثات الطّبوقة. استفد من الاستنتاجات السّابقة لتثبت أنّ:

- الرّباعيّ $EFGH$ معيّن، لماذا ؟
- $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90°$، لماذا ؟

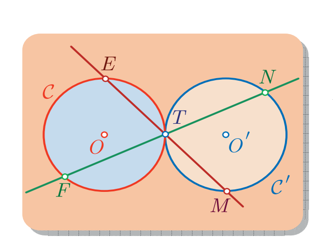
الطريقة الثانية. وهي تعتمد على ربع دورة مركزها O.

- يبدو من الشّكل أنّ النّقطة O مركز المربّع $ABCD$، هي أيضاً مركز الرّباعيّ $EFGH$. من ذلك تأتي فكرة دوران ربع دورة $\mathcal{R}$ مركزه O وينقل A إلى B. إنّ $\mathcal{R}$ ينقل أيضاً B إلى C، وينقل C إلى D، وينقل D إلى A.
- لنبرهن أنّ النّقطة F هي صورة E وفق $\mathcal{R}$. لإثبات ذلك نفترض أنّ E' هي صورة E وفق $\mathcal{R}$ ثمّ نبرهن أنّ النّقطة E' تنطبق على النّقطة F نفسها.
- لماذا تقع النّقطة E' على القطعة المستقيمة $[BC]$؟ ولماذا يكون $BE' = AE$؟ استنتج من ذلك أنّ $E' = F$ وأنّ المثلّث EOF هو مثلّثٌ قائمٌ متساوي السّاقين.
- لماذا تكون المثلّثات FOG و GOH و HOE أيضاً قائمة ومتساوية السّاقين ؟

- برهن أنّ النّقاط E و O و G تقع على استقامة واحدة، وكذلك أنّ النّقاط F و O و H تقع على استقامة واحدة، وأنّ النّقطة O هي منتصف كلٍّ من القطعتين $[EG]$ و $[FH]$، وأخيراً أنّ $EG = FH$.

أنجزِ الحلَّ في الحالتين واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

12 استعمال التّناظر المركزيّ



C و C' دائرتان متماسّتان خارجاً في T، مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ونصفا قطريهما متساويان. E و F نقطتان من الدائرة C. المستقيم (ET) يقطع الدّائرة C' في نقطة M ويقطع المستقيم (FT) الدّائرة C' في نقطة N. برهن أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمّياً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة. الدّائرتان متماسّتان في T، حدّد على الشّكل القطع المستقيمة المتساوية الطّول واكتب علاقات التّساوي.

بحثاً عن طريق.

- المطلوب إثبات أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع. فهل تتوفّر معلومات عن توازي الأضلاع ؟ أو تناصف القطرين ؟ أو أطوال الأضلاع ؟
- يبدو من الشّكل أنّ النّقطة T هي منتصف القطعة المستقيمة $[FN]$ وكذلك هي منتصف القطعة المستقيمة $[EM]$ وقد استنتجنا في الفقرة السابقة أنّ T هي أيضاً منتصف القطعة المستقيمة $[OO']$. تقودنا هذه الملاحظات للتفكير باستعمال التّناظر المركزيّ S_T الذي مركزه النّقطة T.
- ما صورة الدّائرة C وفق التّناظر S_T؟ وما صورة المستقيم (ET)؟ وما صورة المستقيم (FT) ؟ تنتمي النّقطة E إلى الدائرة C وتنتمي أيضاً إلى المستقيم (ET)، فعلى أيّ مستقيمٍ تقع صورة هذه النّقطة وفق التناظر S_T؟ ابحث باتّباع الأسلوب نفسه عن صورة النّقطة F وفق التّناظر S_T.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 استعمال الدوران بربع دورة

$ABCD$ مربّعٌ مركزه O، M نقطة واقعة على القطعة المستقيمة $[AB]$، و N نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ تُحقِّق $\angle MON = 90°$. برهن أنّ المثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

نحو الحلّ

✌ **رسم الشّكل.** ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة، وحدّد عليه: القطرين، والقطع المستقيمة المتساوية الطّول، والزّوايا القائمة. واكتب علاقات التساوي.

✌ **بحثاً عن نتائجَ مباشرة.** يشكّل المربّع $ABCD$ وقطراه نموذجاً يرتبط بتحويلات ربع الدّورة. الزاوية $\angle MON$ قائمة، لذلك يبدو من المناسب استعمال دوران بربع دورة مركزه O.

✌ **بحثاً عن طريق.**

- نعلم أنّ $\angle MON = 90°$، كي نثبت أنّ المثلّث MON قائمٌ ومتساوي الساقين يكفي أنْ نثبت أنّ $OM = ON$.
- كي نبرهن أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه، يكفي أنْ نبرهن أنّ إحدى هاتين القطعتين هي صورة للأخرى وفق تحويلٍ مألوف. ليكن $\mathcal{R}$ الدّوران بربع دورة الذي مركزه O والذي ينقل النّقطة A إلى B.

ما هي صورة المستقيم (AB) وفق $\mathcal{R}$ ؟ وما هي صورة المستقيم (OM) وفق $\mathcal{R}$ ؟ وأخيراً ما صورة النّقطة M وفق $\mathcal{R}$ ؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14

ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O، وليكن ABI و ADJ مثلّثين متساويَي الأضلاع مرسومين خارج المربّع $ABCD$. ليكن $\mathcal{S}$ الانعكاس الّذي محوره (AC).

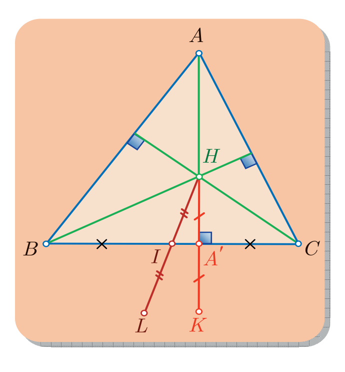
① ❶ برهن أنّ $\angle JAC = \angle IAC = 105°$.

❷ استنتج أنّ المستقيم (AC) ينصّف الزاوية $\angle JAI$ وأنّه عمودي على (JI).

❸ برهن أنّ $\mathcal{S}(I) = J$.

② ❶ ما هي صورة المستقيم (DI) وفق الانعكاس $\mathcal{S}$ ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.



15 ليكن ABC مثلّثاً. ولتكن I منتصف الضلع $[BC]$، و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. نسمّي K نظيرة النّقطة H بالنّسبة إلى المستقيم (BC)، ونسمّي L نظيرة H بالنسبة إلى I.

① ❶ أثبت أنّ $BHCL$ متوازي أضلاع.

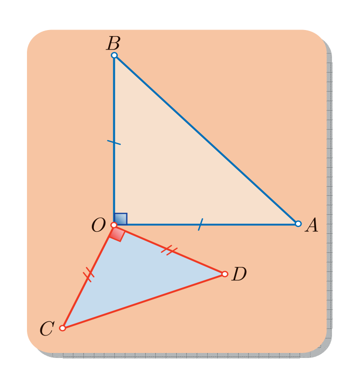
❷ استنتج أنّ المثلّثين ABL و ACL قائمان.

② ❶ أثبت أنّ (KL) يوازي (BC).

❷ استنتج أنّ المثلّث AKL قائم.

③ أثبت أنّ النّقاط A و B و C و K تقع على الدّائرة التي قطرها $[AL]$.

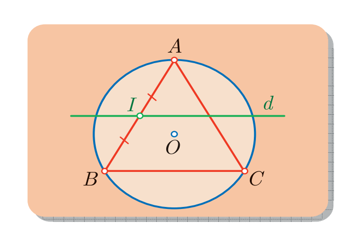
④ أثبت صحّة الخاصّة : «إذا كانت H هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث ABC، وقعت نظائر النّقطة H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث».



16 OAB و OCD مثلّثان قائمان ومتساويا السّاقين يشتركان بالرّأس O. ليكن الدوران ربع الدورة المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه O.

① ما هي صورة النّقطة A وفق $\mathcal{R}$ ؟ ما صورة النّقطة C ؟

② استنتج أنّ $AC = BD$، وأنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.



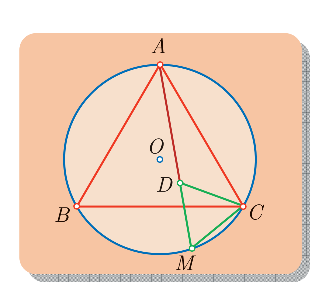
17 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و d مستقيمٌ يمرُّ بالنّقطة I موازياً (BC). نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدوران المباشر الذي مركزه O وزاويته $120°$.

① ❶ ما صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة النّقطة I وفق $\mathcal{R}$ هي النّقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ ما صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة المستقيم d وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (IJ).



18 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن M نقطة من القوس $\overset{\frown}{BC}$ الذي لا يحوي A. D هي نقطة من $[AM]$ تُحقّق $MD = MC$.

① أثبت أنّ المثلّث DMC متساوي الأضلاع ؟

② نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدّوران المباشر الذي مركزه C وينقل A إلى B.

❶ ما صورة المثلّث ADC وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ $BM = AD$ وأنّ $MB + MC = MA$.

19 $ABCD$ مربّع مركزه O. M نقطة من الضّلع $[AB]$. يقطع المستقيمُ المار بالنّقطة B عموديّاً على (CM) المستقيمَ (AD) في P. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ المثلّث POM مثلّث قائم ومتساوي الساقين.

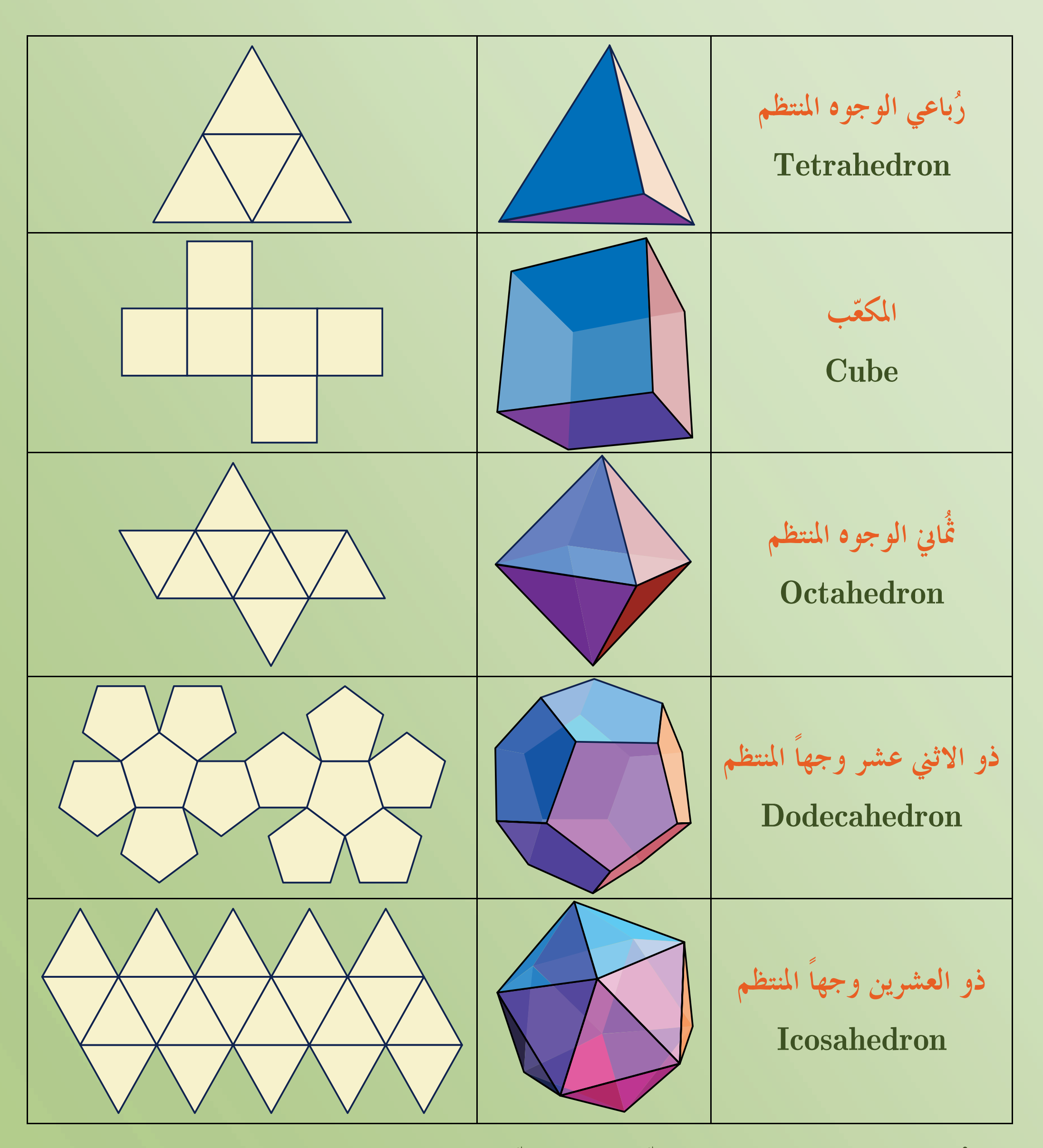
20 ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مربّعين $ABIJ$ و $ACEF$. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ $JC = BF$، وأنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

2

الهندسة الفراغيّة

1. رسم المجسّمات بالمنظور
2. قواعد التّلاقي
3. التّوازي في الفراغ
4. التّعامد في الفراغ

نسمّي مجسّماً منتظماً، كلَّ مجسّمٍ فراغيّ محدّب وجوهه مضلّعات مُنتظمة طَبوقة، وكلّ رأس فيه ينتمي إلى العدد نفسه من الوجوه. هناك فقط خمسةُ مجسّمات متعدّدة الوجوه منتظمة تُسمى المجسّمات الأفلاطونيّة، وهي :



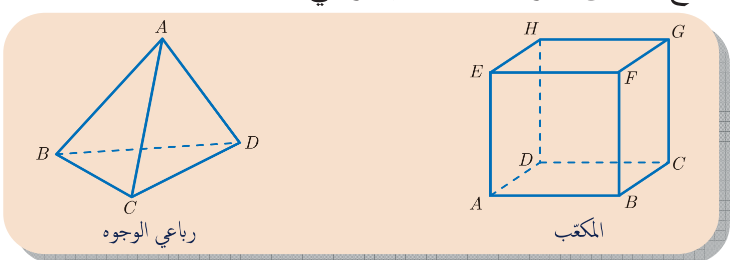
حاولْ بالاستفادة من المخطّطات الشّبكيّة المبيّنة أعلاه أنْ تصنع بنفسك هذه المجسّمات باستعمال الورق المقوّى.

2

الهندسة الفراغيّة

1 رسم المجسّمات بالمنظور

كَثيراً ما نحتاج عند دراسة الهندسة الفراغيّة إلى رسم مجسّمات لأشياء ثلاثيّة الأبعاد، ولإعطاء الانطباع الصّحيح يجبُ اتّباع بعض القواعد الأساسيّة وهي :



① تُرْسَم القطعُ المستقيمة المرئيّة بخطوط مستمرّة، وتُرْسَم غير المرئيّة منها بخطوط متقطّعة.

② تُرْسَم المستقيمات المتوازيةُ في الفراغ مستقيماتٍ متوازية.

③ تُرْسَم المستقيمات المتقاطعةُ في الفراغ مستقيماتٍ متقاطعة. وتُرْسَم النّقاط التي تقعُ على استقامةٍ واحدة على استقامةٍ واحدة.

④ يُرسم منتصف قطعة مستقيمة في منتصف القطعة المرسومة.

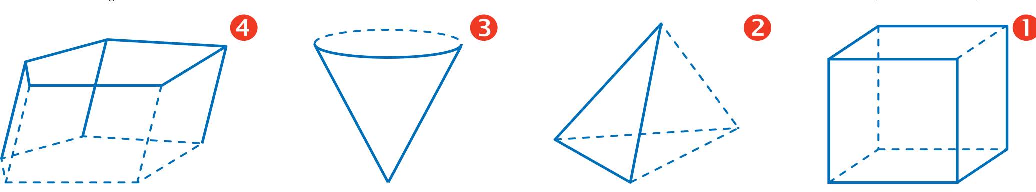
⑤ يُرْسَم الوجهُ الواقع في المستوي الأمامي بقياسه الحقيقيّ. مثل الوجه $ABFE$ في المكعّب أعلاه.

⑥ عموماً لا تُمثّلُ المستقيماتُ المتعامدةُ في الفراغ بمستقيماتٍ متعامدة. كما هي حال المستقيمات (EF) و (EH) في المكعب أعلاه.

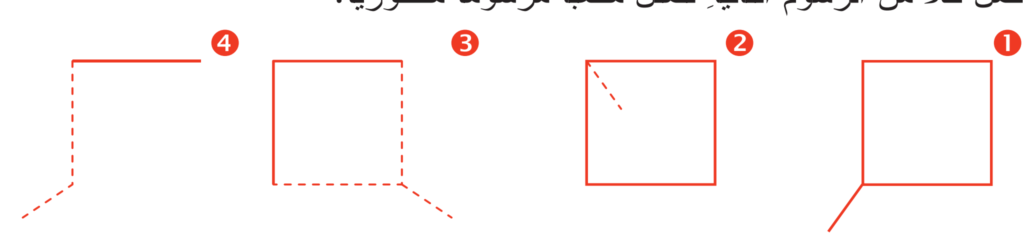


تدرّب

① بيّن أيّ الرّسوم التالية، لا يمثّل مجسّماً تمثيلاً منظوريّاً، وأعدْ رسمه مُصحّحاً في دفترك.

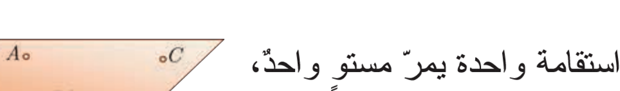


② أكملْ كلاً من الرّسوم التّاليةِ لتمثّل مكعّباً مرسوماً منظوريّاً.

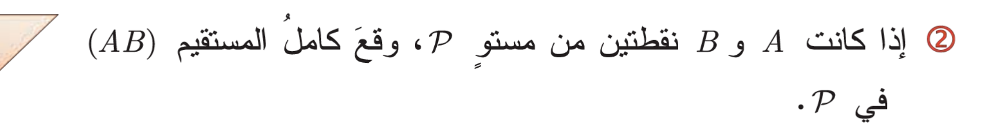


② قواعد التّلاقي

خواص



① بثلاث نقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة يمرّ مستوٍ واحدٌ، نرمز إليه (ABC).



② إذا كانت A و B نقطتين من مستوٍ $\mathcal{P}$، وقعَ كاملُ المستقيم (AB) في $\mathcal{P}$.

③ إذا تقاطع مستويان كان تقاطعهما مستقيماً نسمّيه فصلَهما المشترَك.



- في رباعيّ الوجوه $ABCD$، نرى أنّ المستقيم (AD) هو تقاطعُ المستويين (ABD) و (ACD).
- النّقطتان A و B هما نقطتان من المستوي (ABC)، إذن تنتمي جميعُ نقاطِ المستقيم (AB)، ومنها النقطة N مثلاً، إلى المستوي (ABC).



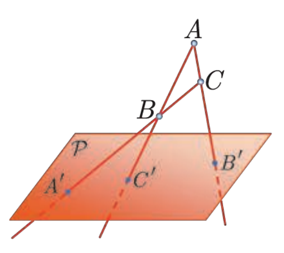
فكّر

في رباعيّ الوجوه $ABCD$ المجاور، يبدو المستقيمان (AI) و (JK) متقاطعين، ولكنّهما في الحقيقة غيرُ ذلك، لماذا ؟

لنفترض على سبيل الجَدل تقاطع المستقيمين (JK) و (AI) في نقطة M. عندئذ نستنتج من انتماء النّقطتين K و M إلى المستوي (ABC)، أنّ المستقيمَ (MK)، وهو نفسه (JK)، واقعٌ في هذا المستوي، ونستنتجُ، من ثَمّ، أنّ المستقيم (MK) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و (ACD)، وهذا يناقضُ كون (AC) فصلهما المشترك.



إثباتُ وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



ليكن المستوي $\mathcal{P}$. ولتكن A و B و C ثلاثَ نقاطٍ ليست على استقامةٍ واحدة ولا تقع في $\mathcal{P}$. نفترض أنّ (AB) يقطع $\mathcal{P}$ في C'، وأنّ (AC) يقطع $\mathcal{P}$ في B'، وأنّ (BC) يقطع $\mathcal{P}$ في A'، أثبتْ أنّ النقّاط A' و B' و C' تقع على استقامة واحدة.

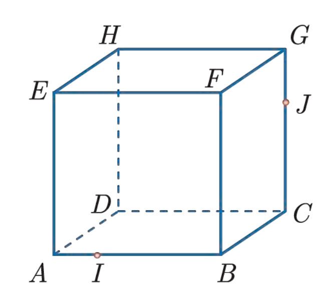
لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت انتماء هذه النقاط معاً إلى مستويين مختلفين.



- لمّا كانت النّقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة، فهي تعيّن مستوياً (ABC).
- النّقطة A' تنتمي إلى (ABC) لأنّها نقطةٌ من المستقيم (BC) المحتوى في (ABC).
- وكذلك نرى أنّ النّقطتين B' و C' هما نقطتان من المستوي (ABC).
- إذن تنتمي النّقاط A' و B' و C' إلى المستوي (ABC) وهي أيضاً تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$. فهي إذن تنتمي إلى تقاطعهما أي إلى فصلهما المشترك.

النّتيجة : تنتمي النِّقاط A' و B' و C' إلى الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $\mathcal{P}$ فهي إذن تقع على استقامة واحدة.

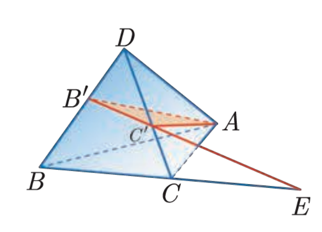


① ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً. ولتكن I نقطةً من الحرف $[AB]$ و J نقطة من الحرف $[CG]$.

❶ بالاستفادة من قواعد التّلاقي، أثبت أنّ النّقطتين I و J تنتميان في آن معاً إلى المستويين (ABJ) و (CGI).

❷ ما هو إذن تقاطعُ المستويين (ABJ) و (CGI)؟



② ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. ولتكن B' نقطةً من الحرف $[BD]$ مختلفة عن B و D، و C' نقطةً من الحرف $[CD]$ مختلفةً عن C و D. نفترض أنّ المستقيمين $(B'C')$ و (BC) يتقاطعان في نقطة E. عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

3 التوازي في الفراغ



تعريف

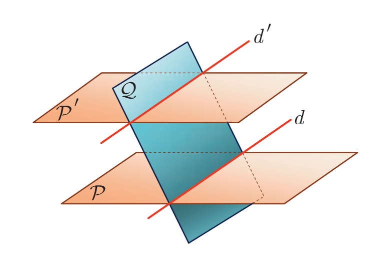
- إذا وقع مستقيمان في مستوٍ واحد ولم يشتركا بأية نقطة قلنا إنّهما متوازيان.
- إذا لم يشترك مستويان بأية نقطة قلنا إنّهما متوازيان.
- إذا لم يشترك مستقيمٌ مع مستوٍ بأية نقطة، قلنا إنهما متوازيان.

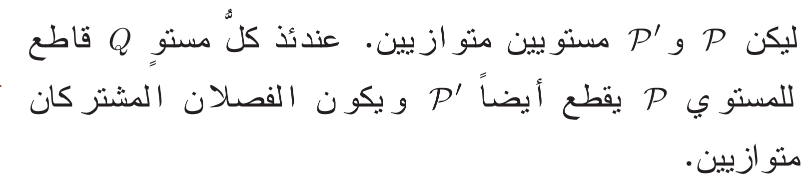
ونصطلح أنْ نطلق صفة التّوازي على مستقيمين منطبقين أو مستويين منطبقين أو مستقيم محتوى في مستوٍ.

المستقيمات المتوازية

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان. أي إذا وازى كلٌّ من المستقيمين d_1 و d_2 المستقيمَ d_3 كان المستقيمان d_1 و d_2 متوازيين.

مُبرهَنة 1

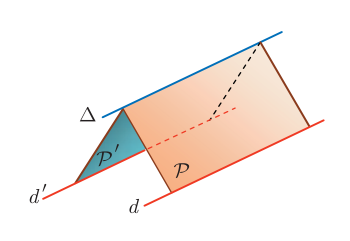




ليكن $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويين متوازيين. عندئذ كلُّ مستوٍ $\mathcal{Q}$ قاطع للمستوي $\mathcal{P}$ يقطع أيضاً $\mathcal{P}'$ ويكون الفصلان المشتركان متوازيين.



مُبرهَنة 2

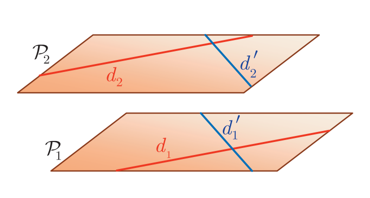


ليكن d و d' مستقيمين متوازيين، وليكن $\mathcal{P}$ مستوياً يحوي d و $\mathcal{P}'$ مستوياً يحوي d'، ولنفترض أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ يتقاطعان بفصلٍ مُشترك Δ. عندئذ يوازي Δ كلاً من d و d'.

المستويات المتوازية

المستويان الموازيان لثالث متوازيان. أي إذا وازى كلٌّ من المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ المستويَ $\mathcal{P}_3$ كان المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيين.

مُبرهَنة 3

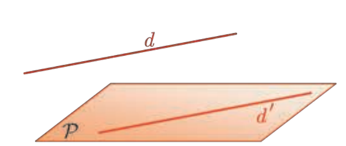


إذا وازى مستقيمان متقاطعان d_1 و d_1'، محتويان في مستوٍ $\mathcal{P}_1$، على التّوالي مستقيمين متقاطعين d_2 و d_2' محتويين في مستوٍ $\mathcal{P}_2$. عندئذ يكون المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيين.



المستوي والمستقيم المتوازيان

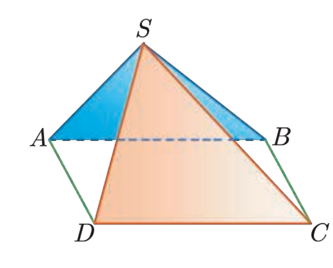
مُبرهَنة 4



إذا كان d و d' مستقيمين متوازيين، عندئذ يكون المستقيم d موازياً لكلِّ مستوٍ $\mathcal{P}$ يحوي المستقيم d'.



مثال تعيين الفصل المشترك لمستويين

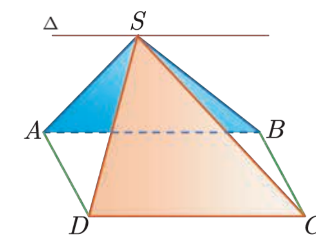


لنتأمّل هرماً $SABCD$ قاعدتُه متوازي الأضلاع $ABCD$. وليكن Δ الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SCD). أثبت أنّ Δ هو المستقيم المارّ بالنّقطة S موازياً للمستقيم (AB) أو (CD).

الحل

- لا يظهرُ المستقيمُ Δ في الشّكل، ولكن يشترك المستويان (SAB) و (SCD) بالنّقطة S، فهي إذن تقعُ على الفصل المشترك Δ.

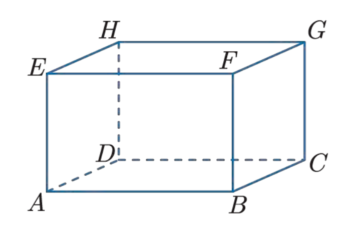
- المستقيمان $(AB) = d$ و $(CD) = d'$ متوازيان، لأنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، ويحوي المستوي $(SAB) = \mathcal{P}$ المستقيمَ d، وكذلك يحوي المستوي $(SCD) = \mathcal{P}'$ المستقيمَ d'. إذن نستنتج مباشرةً، استناداً إلى المُبرهَنة **2**، أنّ الفصل المشترك Δ يوازي كلاً من d و d'.



- وبالنّظر إلى النّقطتين السّابقتين نرى أنّ المستقيم Δ هو المستقيم المارّ بالنّقطة S موازياً المستقيم (AB).



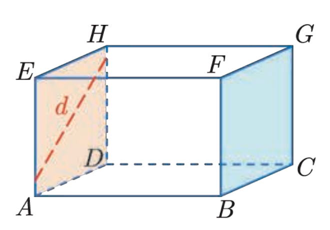
مثال كيف نتعرّف المستقيمات والمستويات المتوازية؟



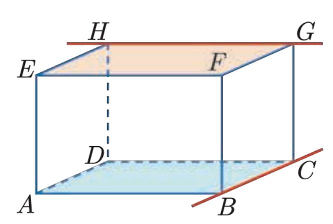
لنتأمّل متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

1. عيّن مستقيماتٍ تمرُّ بالنّقطة E موازيةً للمستوي $(BCGF)$.
2. عيّن مستقيماتٍ غيرَ متقاطعةٍ وغيرَ متوازيّة.

الحل



- لمّا كان المستويان $(ADHE)$ و $(BCGF)$ متوازيين استنتجنا أنّ كلّ مستقيم d محتوى في $(ADHE)$ يوازي المستوي $(BCGF)$. فعلى سبيل المثال نرى أنّ المستقيمات (EA) و (ED) و (EH) توازي جميعاً المستوي $(BCGF)$.



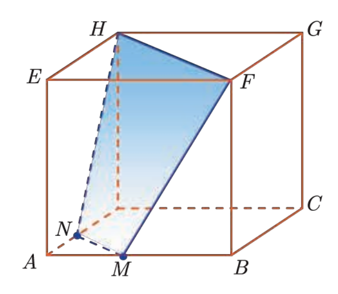
يقع المستقيمان (HG) و (BC) في مستويين متوازيين مختلفين، فهما لا يتقاطعان، ومع ذلك فهما غير متوازيين، لأنّ المستقيم (HG) يوازي المستقيم (DC) وهذا الأخير يتقاطع مع (BC).



① في رباعيّ الوجوه $ABCD$، لتكن I منتصفَ $[AB]$، و J منتصفَ $[BC]$، و K منتصفَ $[CD]$، وأخيراً L منتصفَ $[AD]$.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (IL) و (JK) متوازيان، وأنّ المستقيمين (IJ) و (KL) متوازيان.

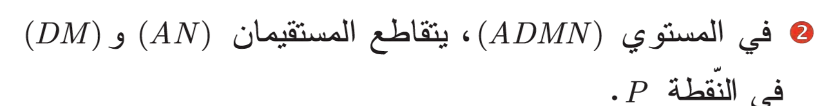
❷ ما نوعُ الرّباعيّ $IJKL$ ؟



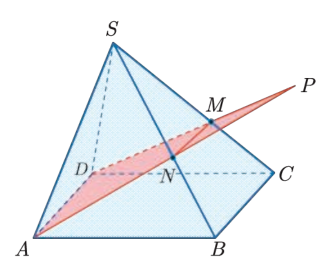
② ليكن لدينا المكعّب $ABCDEFGH$. ولتكن M نقطةً من $[AB]$، ولتكن N نقطةَ تقاطعِ المستوي (FHM) مع المستقيم (DA). أثبت توازي المستقيمين (FH) و (MN).

③ ليكن لدينا الهرمُ $SABCD$ الّذي رأسه S وقاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$. ولتكن M نقطةً من $[SC]$ ولتكن N نقطةً من $[SB]$. نفترض أنّ (MN) يوازي (BC).

❶ أثبت أنّ المستقيمين (AD) و (NM) متوازيان.



❷ في المستوي $(ADMN)$، يتقاطع المستقيمان (AN) و (DM) في النّقطة P.



☝ أثبت أنّ P تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (SAB) و (SDC).

✌ أثبت أنّ المستقيم (SP) هو الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SDC).

👌 استنتج أنّ (SP) يوازي (AB).

2

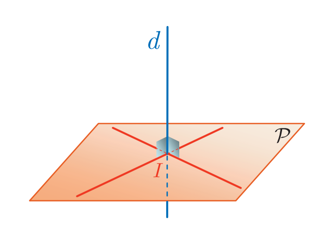
4 التّعامد في الفراغ



تعامد مستقيم ومستوٍ



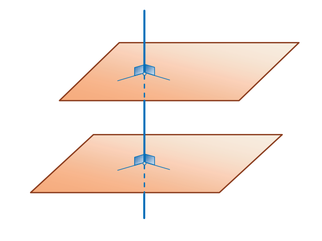
تعريف



لتكن I نقطة تقاطع مستقيم d مع مستوٍ $\mathcal{P}$. نقول إنّ المستقيم d عموديٌّ على $\mathcal{P}$ إذا كان d عموديّاً على مستقيمين مختلفين من $\mathcal{P}$ يمرّان بالنّقطة I. وعندها، **نقبل** أنّ المستقيمَ d يكون عموديّاً على جميع مستقيمات المستوي $\mathcal{P}$ المارّة بالنّقطة I.

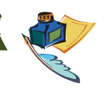


مُبرهَنة 5

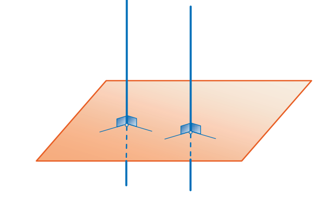


المستويان العموديّان على المستقيم نفسه متوازيان.

المستقيم العموديّ على أحد مستويين متوازيين عموديٌّ على الآخر.



مُبرهَنة 6



المستقيمان العموديّان على المستوي نفسه متوازيان.

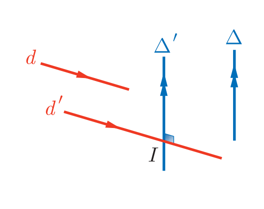
المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عموديٌّ على الآخر.



تعامد مستقيمين في الفراغ



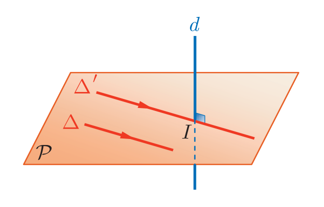
تعريف



ليكن لدينا مستقيمان d و Δ غير واقعين في مستوٍ واحد بالضّرورة. نقول إنّ المستقيمين d و Δ متعامدان، إذا كان المستقيم d'، المارّ بنقطةٍ ما I موازياً d، عموديّاً على المستقيم Δ' المارّ بالنّقطة I نفسها موازياً Δ.

تبقى هذه الخاصّة صحيحة أيّاً كانت النّقطة I.

مُبرهَنة 7



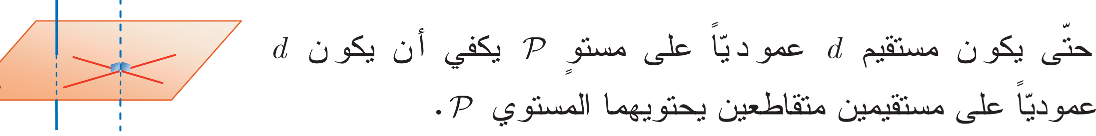
ليكن d مستقيماً عموديّاً على المستوي $\mathcal{P}$. عندئذ يكون d عموديّاً على كلِّ مستقيم Δ محتوى في $\mathcal{P}$.



لأنّ d عموديّ على المستقيم Δ' المارّ بالنّقطة I موازياً Δ.



مُبرهَنة 8



حتّى يكون مستقيم d عموديّاً على مستوٍ $\mathcal{P}$ يكفي أن يكون d عموديّاً على مستقيمين متقاطعين يحتويهما المستوي $\mathcal{P}$.



مُبرهَنة 9

كلُّ مستقيمٍ عموديٍّ على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديّاً على الآخر.



مثال

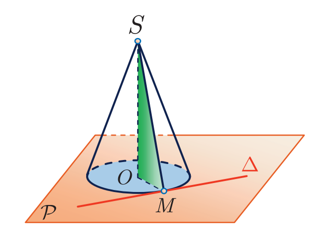
(SA) مستقيمٌ عموديٌّ على مستوٍ $\mathcal{P}$ في A، و Δ مستقيم في $\mathcal{P}$ **لا** يمرّ بالنّقطة A. ليكن K المسقطَ القائمَ للنّقطةِ A على Δ. برهن أنّ المستقيم Δ عموديٌّ على المستوي (SAK).

الحل

في الحقيقة، المستقيمُ Δ عموديٌّ على (AK) استناداً إلى الفرْض. والمستقيم Δ عموديّ على (SA) لأنّ (SA) عموديّ على المستوي $\mathcal{P}$ فهو عموديّ على جميع مستقيماته ومن بينها Δ وذلك عَمَلاً بالمُبرهَنة 7. إذن المستقيمُ Δ عموديٌّ على المستوي (SAK) لأنّه عموديٌّ على المستقيمين المتقاطعين (AK) و (SA) اللّذين يحويهما المستوي (SAK) وذلك بناءً على المُبرهَنة 8.



مثال إثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ



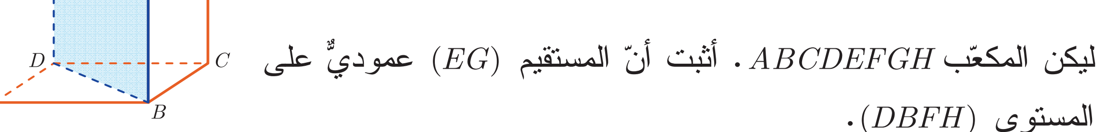
ليكن $\mathcal{C}$ مخروطاً دورانياً رأسه S. وليكن O مركزَ قاعدته الواقعة في المستوي $\mathcal{P}$. نتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ مستقيماً Δ يمسّ قاعدة المخروط في نقطة M منها. أثبت أنّ Δ عموديٌّ على المستوي (SOM)، واستنتج أنّه عموديٌّ على المولِّد (SM).

الحل

- لإثبات المطلوب يكفي أن نبرهن أنّ Δ عموديٌّ على مستقيمين متقاطعين في المستوي (SOM).
- ولكنّ Δ عموديٌّ على (OM) لأنّه مماسٌّ لدائرة قاعدة المخروط، و $[OM]$ نصف قطر فيها.
- نحن إذن أمام الوضع المبيّن في المثال السابق وقد استبدلنا بالمستقيم (AK) المستقيم (OM)، وبالمستقيم (SA) المستقيم (SO). وعليه يكون Δ عمودياً على المستوي (SOM). ويكون من ثَمّ عموديّاً على جميع مستقيمات المستوي (SOM) عموماً، وعلى المستقيم (SM) خصوصاً.



إثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ



ليكن المكعّب $ABCDEFGH$. أثبت أنّ المستقيم (EG) عموديٌّ على المستوي $(DBFH)$.

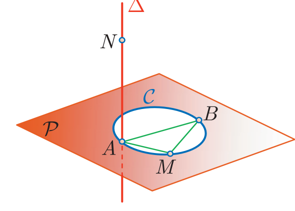
الحل

- يكفي برهان أنّ (EG) عموديٌّ على مستقيمين متقاطعين واقعين في المستوي $(DBFH)$.
- القطعتان المستقيمتان $[EG]$ و $[HF]$ هما قطرا المربّع $HEFG$. إذن المستقيمان (EG) و (HF) متعامدان.
- المستقيم (BF) عموديٌّ على المستوي $(EFGH)$ فهو عمودي على جميع مستقيماته. وبوجهٍ خاصٍّ (BF) عموديٌّ على (EG).

وهكذا نرى أنّ (EG) عموديٌّ على المستقيمين المتقاطعين (BF) و (FH)، فهو عموديٌّ على المستوي $(DBFH)$.

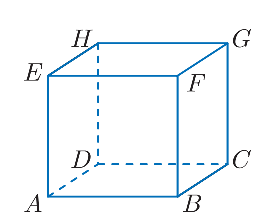


لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً في المستوي P قطرها $[AB]$، وليكن Δ المستقيم العموديّ في A على المستوي P. نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$، ونقطة N من Δ.



1. أثبت أنّ المستقيمين (MA) و (MB) متعامدان.
2. أثبت أنّ المستقيم (MB) عموديٌّ على المستوي (AMN).
3. استنتج أنّ المستقيمين (MB) و (MN) متعامدان.

تمرينات ومسائل



1 نتأمّل المكعّب $ABCDEFGH$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (EA) يوازي :

① المستوي (HFB). ② المستقيم (HB). ③ المستقيم (CG).

♣ المستوي (EAB) يوازي :

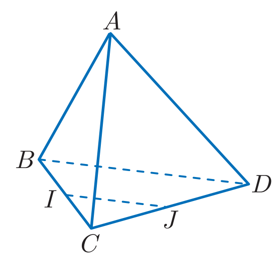
① المستقيم (HD). ② المستوي (HGC). ③ المستوي (HGB).

♣ المستقيم (HG) عمودي على :

① المستوي (FGC). ② المستوي (EAD). ③ المستقيم (AE).

♣ إذا كان $AB = 2$ فطول القطعة المستقيمة $[HB]$ يساوي :

① $2\sqrt{3}$. ② $\sqrt{3}$. ③ $\sqrt{12}$.



2 نتأمّل رباعيّ وجوه منتظمٍ $ABCD$، أي وجوهه مثلّثات متساوية الأضلاع. لتكن النّقطة I منتصفَ $[BC]$ والنّقطة J منتصفَ $[CD]$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (IJ) يوازي :

① المستقيم (BD). ② المستوي (BAD). ③ المستقيم (AB).

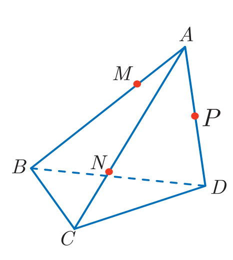
♣ تقاطع المستويين (AIJ) و (ABC) هو :

① المستقيم (AB). ② المستقيم (AI). ③ المستقيم (IJ).

♣ في رباعي الوجوه $ABCD$ يكون :

① $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. ② AIJ متساوي السّاقين. ③ AIJ متساوي الأضلاع.

لنتعلّم البحث معاً



3 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. النّقطة M هي النّقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ التي تُحقّق المساواة $AM = \frac{1}{4}AB$، والنّقطة N هي النّقطة من $[AC]$ الّتي تُحقّق المساواة $AN = \frac{3}{4}AC$، وأخيراً، النّقطة P هي منتصف $[AD]$.

① أثبت أنّ (MN) يقطع (BC)، وأنّ (NP) يقطع (CD)، وأنّ (MP) يقطع (BD).

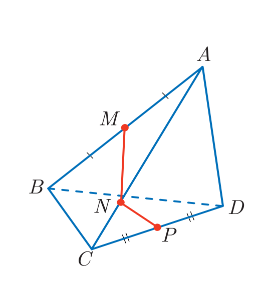
② نسمّي I و J و K نقاط التّقاطع السّابقة بالتّرتيب. أثبت وقوعَ هذه النّقاط على استقامةٍ واحدة.

نحو الحلّ

✌ **بحثاً عن نتائجَ مباشرة.** المستقيم (MN) محتوى في المستوي (ABC). ارسم المثلّث ABC وضَعْ عليه النّقطتين M و N محترماً النِّسب في نصّ المسألة. هل المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان؟ كرّر الأسلوب نفسه لإتمام حلّ السؤال الأوّل.

✌ **بحثاً عن طريق.** ارسم النّقاط I و J و K؛ نقاط تقاطع المستقيمات (MN) و (NP) و (MP) مع المستوي (BCD) بالتّرتيب. كي نبرهن وقوع I و J و K على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أنّها تنتمي إلى تقاطع مستويين. عيّن هذين المستويين.

أنجِزِ الحلَّ واكتبه بلغةٍ سليمة.



4 نتأمّل رباعيّ وجوهٍ $ABCD$. لتكن M منتصفَ $[AB]$، ولتكن P منتصفَ $[CD]$، وأخيراً لتكن N نقطةً من $[AC]$ تُحقّق $AN = \frac{3}{4}AC$.

المطلوب هو رسم تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه رباعيّ الوجوه $ABCD$.

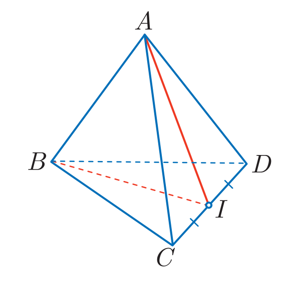
نحو الحلّ

✌ **بحثاً عن نتائجَ مباشرة.** تنتمي النّقطتان M و N في آن معاً إلى كلّ من الوجه ABC والمستوي (MNP). إذن، القطعةُ المستقيمة $[MN]$ هي تقاطعُ هذا الوجه مع المستوي (MNP). ويمكننا أن نستنتج بأسلوبٍ مماثل أنّ $[NP]$ هو تقاطع الوجه ACD مع المستوي (MNP).

بحثاً عن طريق. بقي أن نعيّنَ تقاطعَ المستوي (MNP) مع الوجهين الآخرين، لذلك نهتمُّ بتقاطع هذا المستوي مع مستويَيْ هذين الوجهين.

- لماذا يتقاطع المستقيم (MN) مع المستوي (BCD)؟ لتكن I نقطة التقاطع هذه.
- لماذا يكون المستقيمُ (IP) تقاطعَ المستويين (MNP) و (BCD)؟
- استنتج أنّ تقاطع (MNP) والوجه BCD هو القطعة المستقيمة $[PQ]$ وعيّن Q.

أنجزِ الرّسمَ المطلوب.



5 نتأمّل رباعيَّ وجوهٍ منتظماً $ABCD$. ونضعُ عليه النّقطة I منتصف $[CD]$. نرسم القطعتين المستقيمتين $[AI]$ و $[BI]$. المطلوب إثباتُ أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

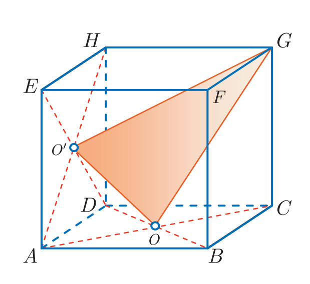
نحو الحلّ

بحثاً عن نتائجَ مباشرة. وجوه $ABCD$ مثلّثات متساوية الأضلاع، والنقطة I هي منتصف الضلع $[CD]$، ماذا يمكنك القول إذن عن $[AI]$ و $[BI]$ في المثلّثين ACD و BCD ؟

بحثاً عن طريق. لإثبات تعامد المستقيمين (AB) و (CD) يكفي أن نثبتَ أنّ أحدهما عمودي على مستوٍ يحوي الآخر. إذن يكفي أن نثبت أنّ (CD) عمودي على مستوٍ يحوي (AB) أو أنّ (AB) عمودي على مستوٍ يحوي (CD).

- نتائج النقطة السابقة تبيِّن لنا أيَّ الخيارين السابقين هو الأنسب.
- بيِّن لماذا يكون المستقيمُ (CD) عمودياً على المستوي (ABI) ؟
- استنتج أنّ (CD) عموديٌّ على (AB).

أنجزِ الحلَّ واكتبه بلغةٍ سليمة.



6 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. فيه O و O' مركزَا الوجهين $ABCD$ و $ADHE$ بالترتيب. احسب أطوال أضلاع المثلّث OGO'.

نحو الحلّ

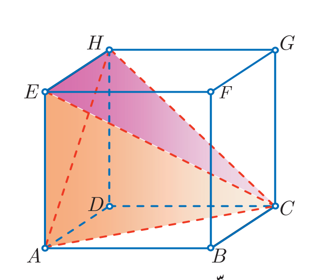
بحثاً عن نتائج مباشرة. عندما نريدُ حسابَ أطوال أو زوايا في الفراغ، نبحثُ عن أشكالٍ مستوية حتّى نتمكّن من الاستفادة من المبرهنات المعروفة في الهندسة المستوية. مثل مُبرهَنة فيثاغورث، أو مُبرهَنة تالس أو غيرهما.

✌ بحثاً عن طريق. نريدُ حساب أطوال أضلاع المثلّث OGO'.

- نبحث عن شكل يفيد في حساب OO'، ولكنّ O مركز المربّع $ABCD$، إذن O منتصف $[AC]$، وكذلك O' منتصف $[AH]$. ارسم المثلّث AHC واستنتج OO'.
- لنبحث عن شكل يفيد في حساب OG. إنّ $[OG]$ ضلعٌ في كلٍّ من المثلّثات GOB، و GOC و GOF وغيرها. لماذا ترى من المفيد اختيار المثلّث GOC؟ ارسم المثلّث GOC واستنتج OG.
- أعد الطريقة السّابقة لحساب $O'G$.

أنجزِ الحلَّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

7 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ارسم مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الممثِّل لسطح رباعيّ الوجوه $EACH$.



نحو الحلّ

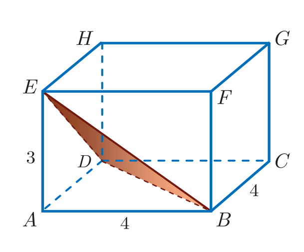
✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. إنّ $[AC]$ و $[CH]$ و $[HA]$ أقطار مربّعات طول ضلع كلٍّ منها $4\,\text{cm}$. ما نوع المثلّث ACH؟

✌ بحثاً عن طريق.

- لرسم الشّكل المستوي المتّصل الممثِّل لرباعيّ الوجوه $EACH$ نرسم وجوه هذا المجسّم واحداً تلوَ آخر بعد أن نختار للبدء وجهاً يَسْهُلُ رسمه.
- بعد المناقشة السّابقة يمكننا أن نبدأ بالمثلّث ACH. أنشئ هذا المثلّث انطلاقاً من مربّع طول ضلعه $4\,\text{cm}$.
- أثبت أنّ بقيّة أوجه رباعيِّ الوجوه في قَيْدِ الدراسة هي مثلّثات قائمة، ثُمّ عيّن الزّاوية القائمة في كلٍّ منها.
- أنجز رسم الشّكل المستوي المتّصل الذي يمثّل سطح رباعيّ الوجوه $EACH$.

8 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه :

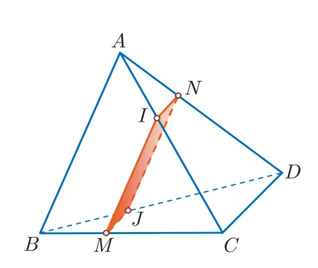
$$AB = BC = 4\,\text{cm} \quad \text{و} \quad AE = 3\,\text{cm}$$



① أثبت أنّ المثلّثَ EBD مثلّثٌ متساوي السّاقين.

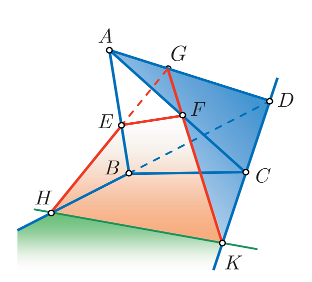
② ارسم بالقياس الحقيقيّ مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الموافق لسطح $EABD$.

9 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن M نقطة من $[BC]$.
نرسمُ من M مستقيماً موازياً للمستقيم (AB) فيقطعُ (AC) في I،
ونرسمُ كذلك مستقيماً موازياً للمستقيم (CD) فيقطعُ (BD) في J،
المستوي (MIJ) يقطع المستقيم (AD) في N.



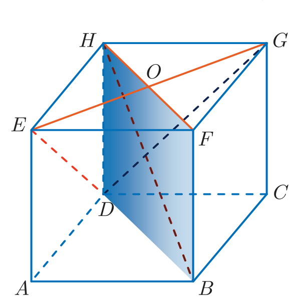
① أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (IN) و (MJ) يوازي المستقيم (CD).
② أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (JN) و (IM) يوازي المستقيم (AB).
③ ما نوع الرباعيّ $IMJN$؟

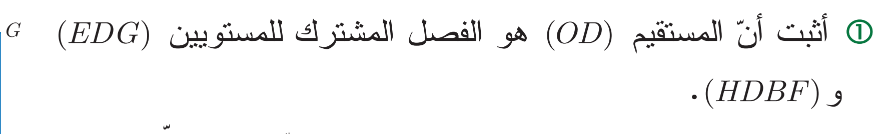
10 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن E نقطةً من $[AB]$،
و F نقطةً من $[AC]$، و G نقطةً من $[AD]$. نفترض أنّ المستقيمين
(EF) و (BC) غير متوازيين. وكذلك الأمر بالنِّسبة إلى المستقيمين
(FG) و (CD) والمستقيمين (EG) و (BD).



① عيّن تقاطع المستوي (EFG) مع كلٍّ من المستويات (ABC) و (ACD) و (ABD).
② لإنشاء تقاطع المستوي (EFG) مع المستوي (BCD) فعلنا ما يأتي :
" عرّفنا K نقطة تقاطع (GF) مع (CD)، وعرّفنا H نقطة تقاطع (GE) مع (BD).
فيكون المستقيم (HK) هو تقاطع المستويين (EFG) و (BCD). "
أثبت صحّة هذا الإنشاء.
③ لتكن I نقطة تقاطع (EF) مع (BCD). هل تتقاطعُ المستقيماتُ (BC) و (HK) و (EF)
في I؟


11 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$، وليكن O مركز المربّع $EFGH$.

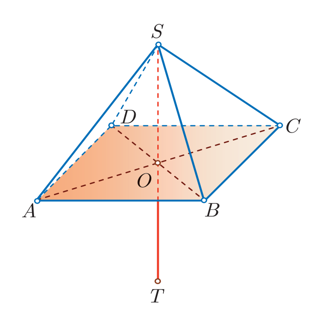



① أثبت أنّ المستقيم (OD) هو الفصل المشترك للمستويين (EDG)
و $(HDBF)$.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ المستطيل $HFBD$ وعيِّن عليه النّقطة O.
③ أثبت أنّ المستقيمين (HB) و (OD) متعامدان.
④ أثبت كذلك تعامد المستقيمين (HD) و (EG). واستنتج أنّ (EG)
عموديٌّ على المستوي $(HFBD)$، وأنّه من ثَمّ عموديٌّ على (HB).
⑤ أثبت أنّ (HB) عموديٌّ على المستوي (DEG).

12 ليكن $ABCDEF$ موشوراً قائماً قاعدتاه ABC و DEF. ولتكن النّقطة I منتصف (EF) و O مركز المستطيل $BCFE$. وأخيراً لتكن M نقطة تقاطع (AO) مع المستوي (DEF).
أثبت أنّ الرباعيّ $EDFM$ متوازي الأضلاع.

13 ليكن $SABCD$ هرماً منتظماً قاعدته المربّع $ABCD$ الذي مركزه O. نفترض أنّ :



$$OS = OA = OB = OC = OD = a$$

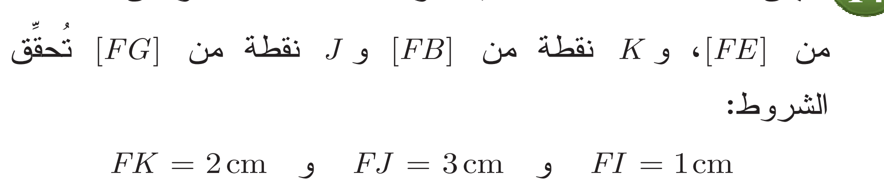
ونعرّف T نظيرة S بالنّسبة إلى O.

① أثبت أنّ $\widehat{SAC} = 45°$ و $\widehat{SBD} = 45°$.

② أثبت أنّ الرباعيّين $SATC$ و $SBTD$ مربّعان.

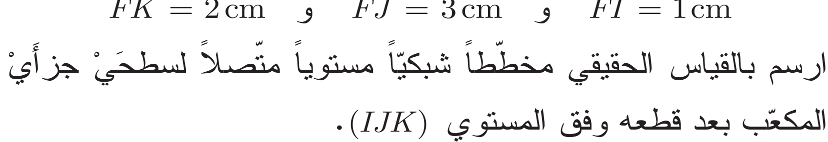
③ أثبت أنّ الوجوه الثمانية للمجسّم $SABCDT$ مثلّثاتٌ متساويةُ الأضلاع. ما اسم هذا المجسّم ؟

14 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن I نقطة



من $[FE]$، و K نقطة من $[FB]$ و J نقطة من $[FG]$ تُحقّق الشروط:

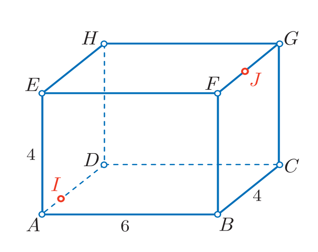
$$FI = 1\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FJ = 3\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FK = 2\,\text{cm}$$



ارسم بالقياس الحقيقي مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً لسطحَيْ جزأَيْ المكعّب بعد قطعه وفق المستوي (IJK).

مساعدة : استعمل الفرجار لتتجنّب حساب IJ و JK و KI.

15 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه:



$AE = BC = 4\,\text{cm}$ و $AB = 6\,\text{cm}$.

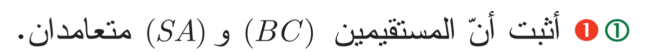
لتكن النقطة J منتصف $[FG]$، والنقطة I من $[AD]$ التي تحقّق الشّرط $AI = 1\,\text{cm}$.

ارسم، على سطح متوازي المستطيلات هذا، أقصر طريق يصل بين I و J.

مساعدة : ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً مناسباً لسطح $ABCDEFGH$.

16 ليكن لدينا رباعيّ الوجوه المنتظم $ABCD$، نفترض أنّ $AB = 5\,\text{cm}$. ولتكن I و J و K منتصفات حروفه $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ بالترتيب. ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً يمثّل سطح المجسّم الذي نحصل عليه بعد حذف رباعيّ الوجوه $AIJK$ من رباعيّ الوجوه $ABCD$.

17 ليكن رباعيّ الوجوه $SABC$ الذي نفترض فيه أنّ (SA) عموديٌّ على (ABC) وأنّ المثلّث ABC قائمٌ في B.



① **1** أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (SA) متعامدان.

2 أثبت أنّ المثلّث SBC قائم في B.

② لتكن H نقطة من $[AB]$، نرسم المستوي المارّ بالنّقطة H عموديّاً على (AB)، فيقطع (AC) في النّقطة I، ويقطع (SC) في J، ويقطع (SB) في K.

1 أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (HI) متوازيان.

2 أثبت أنّ المستقيمين (HI) و (KJ) متوازيان.

3 أثبت كذلك أنّ المستقيمين (KH) و (SA) متوازيان. واستنتج توازي (KH) و (IJ).

4 أثبت أنّ $HIJK$ مستطيل.

③ نفترض أنّ $AB = 1$ وأنّ $SA = BC = 2$ وأنّ $AH = x$.

1 أثبت أنّ $HI = 2x$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث ABC.

2 أثبت أنّ $HK = 2(1-x)$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث SAB.

3 احسب $\mathcal{A}(x)$: مساحة المستطيل $HIJK$ بدلالة x.

④ **1** أثبت أنّ $4x(1-x) = 1-(1-2x)^2$.

2 ما هي قيمة x الّتي تجعل $\mathcal{A}(x)$ أكبر ما يمكن؟ عيّن عندئذ موضع H على $[AB]$ وبيّن طبيعةَ الرّباعيّ $HIJK$ في هذه الحالة.

3 الأشعّة والهندسة التّحليليّة

1. مقدّمة عامّة
2. الأشعّة والمساواة الشّعاعيّة
3. جمع الأشعّة وطرحها
4. ضرب شعاع بعدد حقيقيّ
5. الارتباط الخطيّ لشعاعين
6. مقدّمة في الهندسة التّحليليّة

لا يُعرفُ أصلُ قاعدةِ متوازي الأضلاعِ في جمع الأشعَّة نظراً إلى بساطتها وحدسيتها، وقد تكون قد وردت في عمل ضاعت آثاره لأرسطوطاليس، وهي موجودة في ميكانيك هيرون الاسكندري من القرن الأوّل للميلاد، وهي أوّل النّتائج الواردة في كتاب اسحق نيوتن الّذي حمل اسم مبادئ الرياضيات **Principia Mathematicæ (1687)**.
لقد تعامل نيوتن حصرياً مع مقادير شعاعيّة مثل السّرعة والقوّة، ولم يذكر مفهوم الشّعاع بصفته مفهوماً قائماً بذاته. أمّا الدّراسة المنهجيّة للأشعة فهي من نتاج القرنين التّاسع عشر والعشرين.

نَشَأَت الأشعّة أوّل ما نشأت في العقدين الأوّلين من القرن التّاسع عشر مع التّمثيل الهندسيّ للأعداد العقديّة، حيثُ نظر عددٌ من العلماء، مثل وِسل **Wessel** وآرغاند **Argand** وغاوس **Gauss** وغيرهم، إلى الأعداد العقديّة بصفتها نقاطاً في المستوي، أو أشعّة ثنائيّة الأبعاد. ثُمّ تتالتْ أعمالُ العديد من العلماء مثل هاملتون وغراسمان وغيرهما لتضعَ هذا المفهوم في صيغته الحاليّة، حيثُ أصبحت الأشعّة في صُلب العديد من المفاهيم في الفيزياء والرّياضيّات التطبيقيّة.

1 مقدّمة عامّة

لنتأمّل الشّكل الآتي النّاتج عن رصف مقاطع زخرفيّة متماثلة، ولنحاول الإجابة عن الأسئلة الآتية :

① انسحاباتٌ مختلفة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقطعين ❸ و ❹ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{A\to P}$ الّذي ينقل A إلى P.
- $T_{A\to M}$ الّذي ينقل A إلى M.
- $T_{D\to N}$ الّذي ينقل D إلى N.

❷ لنحاول فهم لماذا كان لهذه الانسحابات تأثيرات مختلفة على المقاطع الزخرفية.

- أيكون للمستقيمين (AA') و (AP) **المنحى** نفسه ؟ أي هل هما متوزيان ؟
- للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه. قارن **جهة** الانتقال، من A إلى A'، ومن A إلى M، ومن D إلى N.
- قارن **طولَي** AA' و DN.

② انسحابات متماثلة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقاطع ❷ و ❸ و ❹ و ❼ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{B\to B'}$ الّذي ينقل B إلى B'.
- $T_{C\to C'}$ الّذي ينقل C إلى C'.
- $T_{D\to D'}$ الّذي ينقل D إلى D'.
- $T_{E\to E'}$ الّذي ينقل E إلى E'.

❷ اشرح لماذا كان لهذه الانسحابات التأثير نفسه على المقاطع الزخرفيّة.

❸ باستعمال نقاط أخرى من الشّكل، اذكر انسحاباً آخر تأثيره على المقاطع الزخرفية يماثل تأثير الانسحاب $T_{A\to A'}$.

③ الأشعّة

الانسحاب الّذي ينقل A إلى A' ينقل أيضاً B إلى B'، وكذلك ينقل C إلى C'، .... نقول إنّ الأزواج (A,A')، (B,B')، (C,C')، ....، التي تكوّن كلّ منها من نقطة وصورتها وفق هذا الانسحاب تعرّف كائناً واحداً نسميه **شعاعاً** ونرمز إليه بالرّمز $\vec{u}$ (ونقرؤه "الشّعاع u").
نرمز أيضاً إلى هذا الشّعاع بالرّمز $\overrightarrow{AA'}$ للتّذكير بمُمَثِّل هذا الشّعاع الّذي مبدؤه A، أو $\overrightarrow{BB'}$ أو $\overrightarrow{CC'}$ أو .... فنكتب

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \cdots$$

❶ يقول ساطع "الشّعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متماثلان". اشرح لماذا جافاه الصواب.

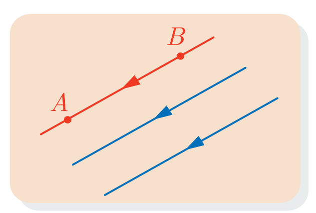
❷ باستعمال النّقاط في الشّكل ، اذكر أشعة أخرى تمثّل كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ED}$.

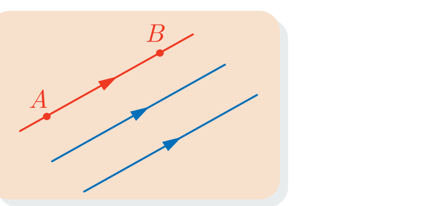
② الأشعّة والمساواة الشّعاعية



المَنحى والجهة

عندما يكون مستقيمان متوازيين نقول إنّ لهما **المنحى** نفسه. وعندما نُعطى منحى ما بواسطة مستقيم (AB) يكون لدينا **جهتان** ممكنتان : جهةٌ من A إلى B، وجهةٌ أخرى من B إلى A.





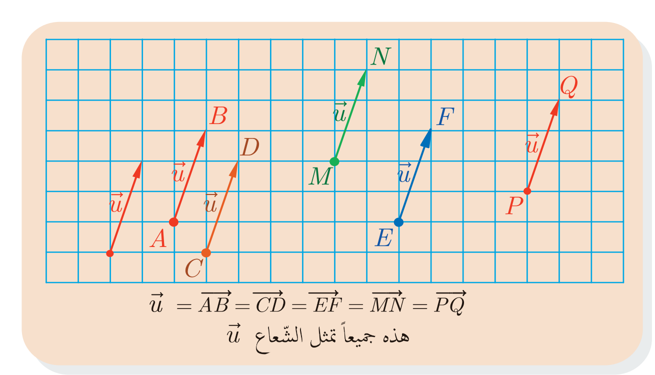


الانسحاب والمساواة الشّعاعيّة

لتكن A و B نقطتين مختلفتين كما في الشّكل . الانسحاب الّذي ينقل A إلى B، ينقل أيضاً C إلى D، و E إلى F، و M إلى N، و P إلى Q. نقرن بهذا الانسحاب **الشّعاع** $\vec{u}$ الّذي

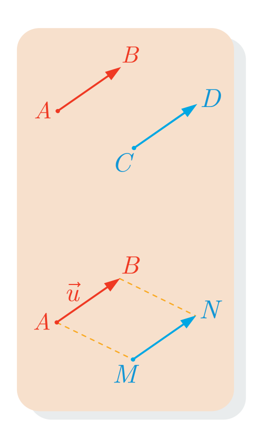
- ⊡ **منحاه** : محدد بالمستقيم (AB).
- ⊡ **جهته** : من A إلى B.
- ⊡ **طوله** : طول القطعة المستقيمة $[AB]$.

ويمكن أن نرمز إلى هذا الشّعاع أيضاً بالرّمز $\overrightarrow{AB}$ (**بداية** الشّعاع A **ونهايته** B)، أو $\overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{EF}$ أو ....



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$
هذه جميعاً تمثل الشّعاع $\vec{u}$

تعريف

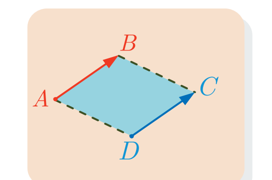


- القول إنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أنّ الانسحاب الّذي ينقل A إلى B ينقل أيضاً C إلى D، وعندها نسمي هذا الانسحاب : **الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$**.
- القول إنّ شعاعين **متساويان** يعني أنّ لهما **المنحى** نفسه **والجهة** نفسها **والطّول** نفسه.
- لتمثيل شعاع ما $\vec{u}$ يمكننا اختيار **مبدأ** كيفيٍّ لهذا الشّعاع، فإذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ وكانت M نقطة من المستوي أمكن رسم الشّعاع $\overrightarrow{MN}$ الّذي يحقّق $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

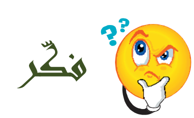
في الحقيقة لدينا الخاصّة المهمّة الآتية :



خاصة مهمة

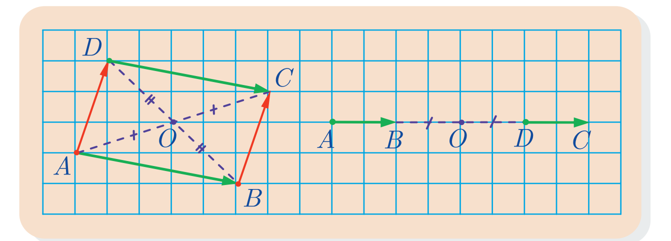


- إذا كان الرّباعيّ $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- وبالعكس، إذا لم تكن النّقاط A و B و C على استقامة واحدة، وكان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ كان الرّباعيّ $ABCD$ متوازي الأضلاع.

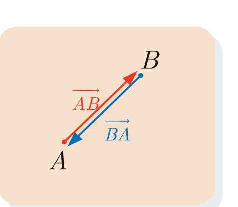


فكّر

أَصحيح أنّ الشّرط اللازم والكافي لتحقّق المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ هو أن تكون القطعتان المستقيمتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين، أي أن يكون منتصف $[AC]$ منطبقاً على منتصف $[BD]$ ؟

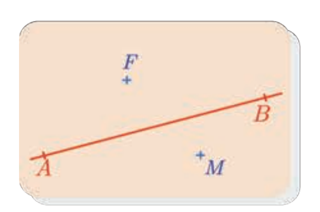


بعض الأشعّة الخاصّة



- **الشّعاع الصّفري** $\vec{0}$: أيّاً كانت النّقطة M من المستوي، كان $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- **الشّعاع المعاكس** لشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو الشّعاع الذي منحاه منحى الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ وطويلته تساوي طويلة الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ وجهته عكس جهة الشّعاع $\overrightarrow{AB}$. إنّه إذن الشّعاع $\overrightarrow{BA}$. ونكتب : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

تدرّب



① ليكن $\vec{u}$ الشّعاع الّذي منحاه (AB) وجهته من A إلى B وطوله $3\,\text{cm}$.

❶ ارسم الشّكل المجاور في دفترك.

❷ أنشئ الشّعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$.

② تأمّل الشّكل التالي، ثمّ املأ الفراغات □ فيما يلي.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T

❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M\square}$، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M\square}$، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{\square O}$.

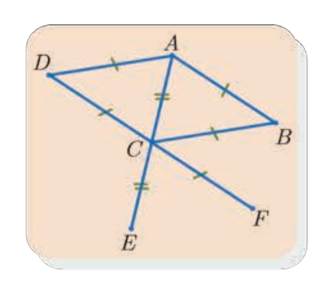
❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{\square L}$، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{H\square}$، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{G\square}$.

❼ النّقطة I هي صورة □ وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة □ هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{S\square}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{G\square}$.

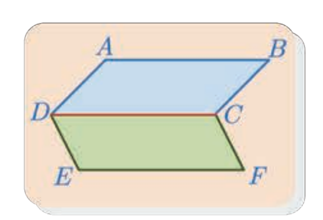


③ نتأمّل في الشّكل المجاور معيّناً $ABCD$. لتكن E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C بالترتيب. علّل ما يأتي:

❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$

❷ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

❸ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$



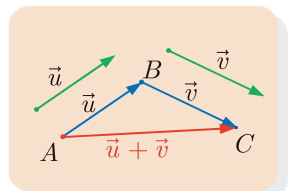
④ $ABCD$ و $CDEF$ هما متوازيا أضلاع بحيث لا تقع النّقاط A و B و E و F على استقامة واحدة.

أثبت أنّ الرّباعيّ $ABFE$ متوازي أضلاع.

جمعُ الأشعّة وطرحُها



علاقة شال Chasles، طريقة المثلّث

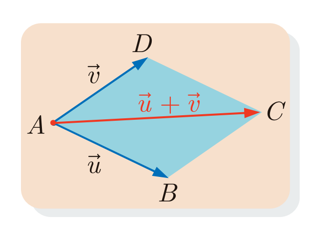


لحساب مجموع الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نختار نقطة A من المستوي ثم نعرّف النّقطة B بالشرط $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$، ونعرّف النّقطة C بالشرط $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. عندئذ يكون $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$.

تسمّى المساواة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **علاقة شال**، وهي محقّقة أياً كانت النّقاط A و B و C في المستوي.



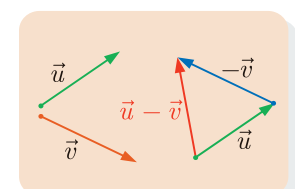
طريقة متوازي الأضلاع



عندما يكون للشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ المبدأ نفسه A ويكون $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$، عندئذ $\vec{u}+\vec{v}$ يساوي الشّعاع $\overrightarrow{AC}$ حيث C هي النّقطة من المستوي التي تجعل المضلّع $ABCD$ متوازي الأضلاع.



طرح شعاعين



نحصل على حاصل طرح الشّعاع $\vec{v}$ من $\vec{u}$ بجمع الشّعاع $\vec{u}$ إلى الشّعاع المعاكس للشّعاع $\vec{v}$ أي نكتب : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. كما هو مُوضَّحٌ في الشّكل .

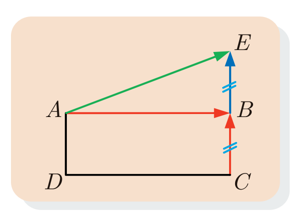


ليكن $ABCD$ مستطيلاً مركزه O. أنشئ على شكلين مختلفين :

❶ النّقطة E التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

❷ النّقطة F التي تحقّق $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

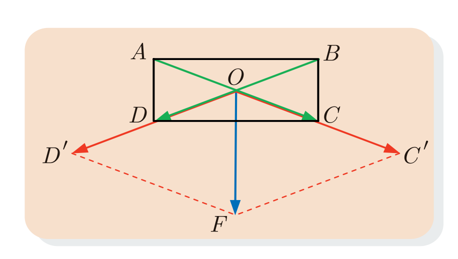
الحل



❶ نعيّن E بالشّرط $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}$.

عندها يكون لدينا استناداً إلى علاقة شال :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$.



❷ هنا لدينا عملية طرح، ولنتذكّر أنّ $-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}$، إذن تؤول المسألة إلى تعيين النّقطة F التي تحقّق:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$

ننشئ من O الشّعاعين $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{BD}$ فيكون

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}.$$

ثُم ننشئ F باستعمال طريقة متوازي الأضلاع.



مثال إثبات صحّة مساواة شعاعيّة

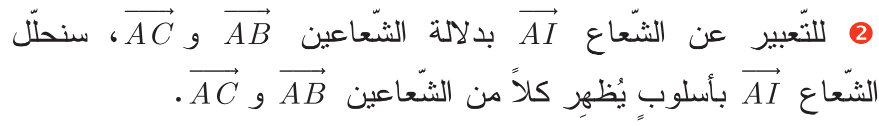
❶ أثبت أنّه أيّاً كانت النّقاط O و A و B من المستوي، فإنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

❷ لتكن A و B و C ثلاث نقاط في المستوي، وليكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أثبت أنّ $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

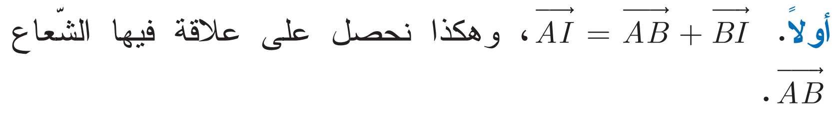
الحل

❶ لنلاحظ أنّ :

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\left(-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}.$$



❷ للتّعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{AI}$ بدلالة الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، سنحلّل الشّعاع $\overrightarrow{AI}$ بأسلوبٍ يُظهِر كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



أولاً. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$، وهكذا نحصل على علاقة فيها الشّعاع $\overrightarrow{AB}$.



ثانياً. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}$، فنحصل على علاقة فيها الشّعاع $\overrightarrow{AC}$.



بجمع العلاقتين السّابقتين طرفاً مع طرف نجد :

$$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}$$

ولكنّ النّقطة I هي منتصف $[BC]$ والشّعاعان $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$. إذن

$$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



تدرّب

① لتكن A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. أنشئ النّقاط E و F و G و H التي تُحقق

$$\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v},\quad \overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v},\quad \overrightarrow{AG}=-\vec{u}-\vec{v},\quad \overrightarrow{AH}=-\vec{u}+\vec{v}$$

❹ ضربُ شعاعٍ بعددٍ حقيقيّ

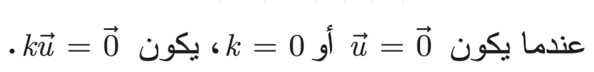
تعريف

ليكن $\vec{u}$ شعاعاً غير معدوم وليكن k عدداً حقيقيّاً غير معدوم، عندئذ

- جداء ضرب الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقيّ **الموجب** $k > 0$ هو الشّعاع $k\vec{u}$ المعرّف بالخواصّ الآتية:
  1. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه.
  2. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ الجهة نفسها.
  3. طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي جداء ضرب طول الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد k.

- جداء ضرب الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقيّ **السالب** $k < 0$ هو الشّعاع $k\vec{u}$ المعرّف بالخواصّ الآتية:
  1. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه.
  2. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ جهتان متعاكستان.
  3. طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي جداء ضرب طول الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد $|k| = -k$.

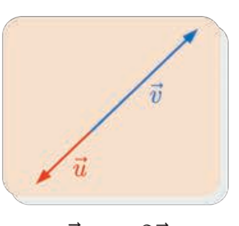
- جرت العادة أن نرمزَ إلى طول شعاع $\vec{u}$ بالرمز $|\vec{u}|$، وعليه يمكن تلخيص العلاقة بين طولَي الشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ بالقول إنّ طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي طول الشّعاع مضروباً بالقيمة المطلقة للعدد k، أي $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.



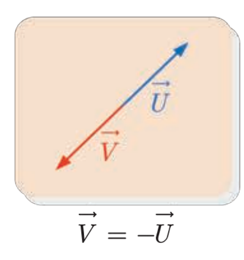


عندما يكون $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$، يكون $k\vec{u} = \vec{0}$.

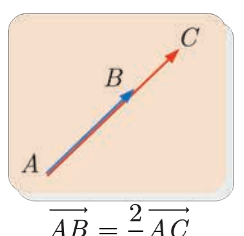


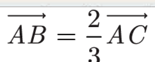


$\vec{v} = -2\vec{u}$



$\vec{V} = -\vec{U}$




$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



قواعد الحساب

يمكن إجراء العديد من الحسابات على الأشعّة بأسلوب يشبه ما نفعله مع الأعداد. وبهدف تثبيت هذه العمليات نلخصها فيما يأتي :



مُبرهَنة

ليكن k و k' عددين حقيقيّين، وليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين. عندئذ

1. $k\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$.
2. $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$.
3. $\left(k+k'\right)\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$.
4. $k\left(k'\vec{u}\right)=\left(kk'\right)\vec{u}$.
5. $1\vec{u}=\vec{u}$.

مثال

- وفق القاعدة الثّالثة : $2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AB}=(2-5)\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AB}$.
- ثُمّ من القاعدة الرّابعة : $-3\overrightarrow{AB}=3\left(-\overrightarrow{AB}\right)=3\overrightarrow{BA}$
- بتطبيق القاعدة الثّانية ثُمّ علاقة شال نجد :

$$\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=3\overrightarrow{AC}.$$

- من القاعدة الرّابعة نجد : $-5\times\left(\frac{2}{5}\vec{v}\right)=\left(-5\times\frac{2}{5}\right)\vec{v}=-2\vec{v}$.
- $3\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ تُكافئ $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ أي $M=A$ وذلك استناداً إلى القاعدة الأولى.
- يمكننا أن نكتب وفق القاعدة الثّانية : $-5\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=-5\vec{i}-5\vec{j}$.
- تعطينا القاعدة الثّالثة الخاصّة الآتية : أيّاً كان العدد الحقيقيّ x، كان

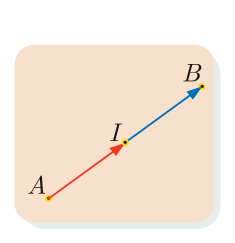
$$\left(x+2\right)\vec{i}=x\vec{i}+2\vec{i}$$

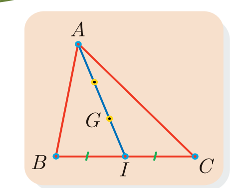


تطبيقات هندسية

① **منتصفُ قطعةٍ مستقيمة** : إنّ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي النّقطة I التي تحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. كما نعبّر عن الخاصّة نفسها بأيّ واحدة من العلاقات الآتية :

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$





② **مركزُ ثقل مثلّث** : مركز ثقل مثلّث ABC هو نقطة تلاقي متوسطاته، فهو إذن النّقطة G التي تحقّق :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$$

عندما يكون $[AI]$ المتوسّط المرسوم من الرأس A. ونعبّر عن الخاصّة نفسها بالعلاقتين :

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}.$$

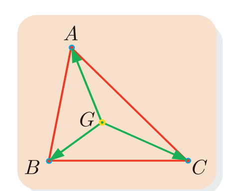
ومن جهة أخرى، نلاحظ باستعمال علاقة شال أنّ

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}$$

إذن بجمع هاتين العلاقتين نجد

$$2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI}$$

ولكن الشّعاعين $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعاكسان لأنّ I منتصف $[BC]$، إذن $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ وعليه

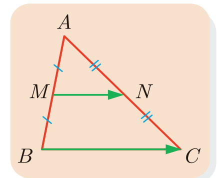


$$2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ وصلنا إلى المساواة

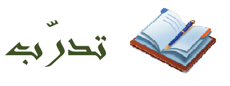
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

③ لنتأمّل المثلّث ABC. إذا كانت M منتصف الضلع $[AB]$، وكانت N منتصف الضلع $[AC]$، كان $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



في الحقيقة، يمكننا أن نبرهن صحة هذه النتيجة باستعمال الأشعة كما يأتي :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$



ليكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعَيْن. في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب الشّعاع $\vec{u}$ بالشّكل $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ حيث x و y عددان حقيقيّان.

❶ $\vec{u} = \vec{i} - 2\left(\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{1}{2}\vec{j}$.

❷ $\vec{u} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$.

❸ $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) - \frac{1}{4}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$.

الحل

يقودنا استعمال القواعد الثّانية والثّالثة والرّابعة مباشرة إلى النتائج الآتية :

❶

$$\vec{u} = \vec{i} - 2(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{2}\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{j}$$
$$= (1-2)\vec{i} + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)\vec{j} = -\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$

❷

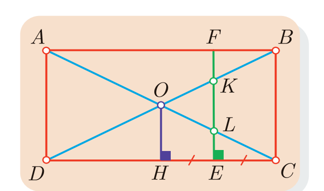
$$\vec{u} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}(\vec{i} - \vec{j}) = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$$
$$= -\frac{2}{5}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{4}\vec{j} = \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)\vec{j}$$
$$= -\frac{13}{20}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}$$

❸

$$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) - \frac{1}{4}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{j} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\vec{j}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$$



① تأمّل الشّكل المجاور، ثُمّ املأ الفراغات فيما يأتي بالأعداد المناسبة



❶ $\overrightarrow{AC} = \cdots\cdots \overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = \cdots\cdots \overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = \cdots\cdots \overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = \cdots\cdots \overrightarrow{KE}$

② بيّن الصواب من الخطأ في العبارات الآتية مُعلِّلاً إجابتك :

❶ إذا كان ABC مثلّثاً متساوي السّاقين كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

❷ إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

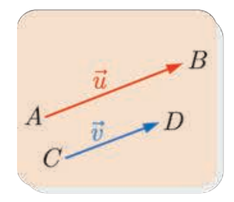
❸ إذا كان $[AI]$ متوسّطاً في المثلّث ABC كان : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

❹ إذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

❺ إذا كانت C نظيرة A بالنّسبة إلى منتصف $[BD]$ كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

5 الارتباط الخطّيّ لشعاعين

تعريف



نقول إنّ الشّعاعين غير المعدومين $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ **مرتبطان خطياً** إذا وفقط إذا وُجد عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق المساواة $\vec{v} = k\vec{u}$. وهذا يُكافئ القول إنّ لهما المنحى ذاته، أو إنّ المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان أو طبوقان.

و**نصطلح** أنّ الشّعاع الصّفريّ $\vec{0}$ مرتبط خطّياً بأي شعاع $\vec{u}$، لأنّ $\vec{0} = 0\vec{u}$، وذلك مع أنّه لا معنى للحديث عن منحى الشّعاع الصفريّ إذ لا منحى له.



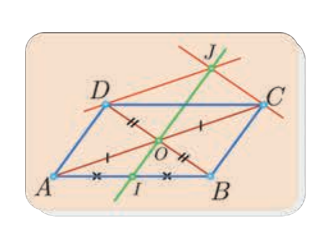
فكّر

تتمثّل أهمّيّة خاصّة الارتباط الخطّيّ لشعاعين في كونها تعبر عن خواص هندسيّة مهمّة :

- المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيان** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- تقع النّقاط A و B و C **على استقامة واحدة** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

مثال

إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$. يقطع المستقيمُ المارّ بالنّقطة D موازياً (AC) المستقيمَ المارّ بالنّقطة C موازياً (BD) في النّقطة J. أثبت أنّ النّقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.

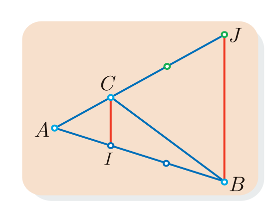
الحل

يبدو من الشّكل أنّه يمكن التّعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{OI}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{BC}$. في الواقع إذا تأمّلنا المثلّث ABC وجدنا أنّ I منتصف $[BA]$ وأنّ O منتصف $[AC]$، نستنتج إذن العلاقة (1) الآتية : $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

لنحاول الآن كتابة $\overrightarrow{OJ}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$. ينتج من معطيات المسألة أنّ المضلّع $OCJD$ متوازي الأضلاع ومنه $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$. لمّا كانت النّقطة O منتصف $[BD]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ ومنه نجد العلاقة (2) الآتية : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$. بمقارنة العلاقتين (1) و (2) يمكننا أن نكتب $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$، فالنّقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.



إثبات توازي مستقيمين



لنتأمّل المثلّث ABC ، ولتكن I النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

و J النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (IC) و (BJ) متوازيان.

الحل

انطلاقاً من علاقة شال يمكننا أن نكتب $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$. ومن الفرْض لدينا $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ فنحصل على العلاقة الآتية : $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ومنها

$$3\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

نكتب بأسلوب مماثل انطلاقاً من علاقة شال : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ ، ولكن $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ ومنه العلاقة الآتية :

$$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نجد : $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$. نستنتج إذن أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{BJ}$ و $\overrightarrow{IC}$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان (IC) و (BJ) متوازيان.



① نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$. ونعرّف النّقطتين M و N بالعلاقتين

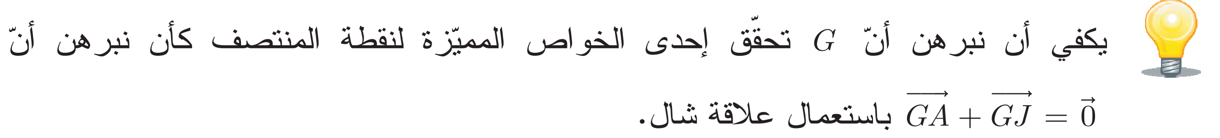
$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$$

❶ ارسم شكلاً مناسباً.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (AM) و (DN) متوازيان.

② ليكن ABC مثلّثاً. لتكن I منتصف $[AB]$، و J النقطة المُعرّفة بالمساواة $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
وأخيراً لتكن G النّقطة التي تجعل الرّباعيّ $JCGI$ متوازي الأضلاع.

❶ أثبت أنّ النّقطة G هي منتصف $[AJ]$.



يكفي أن نبرهن أنّ G تحقّق إحدى الخواص المميّزة لنقطة المنتصف كأن نبرهن أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ باستعمال علاقة شال.

❷ أثبت أنّ النقطة G هي مركز ثقل المثلّث ACI .

6 مقدّمة في الهندسة التّحليليّة

اختيار مَعْلَم على مستقيم Δ، يعني اختيار نقطتين O و I من هذا المستقيم بهذا التّرتيب. نسمّي O **المبدأ** ونعرّف الشّعاع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$، الّذي نسمّيه **شّعاع الأساس** ونرمز إلى **المَعْلَم** بالرّمز $\left(O;\vec{i}\right)$. وتكون **فاصلة** النّقطة M من المستقيم Δ في المَعْلَم $\left(O;\vec{i}\right)$ هي العدد الحقيقيّ الوحيد x الّذي يحقّق: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.



تعيين نقطة في المستوي

اختيارُ مَعْلَم في المستوي يعني إعطاء ثلاث نقاط، ليست على استقامة واحدة، O و I و J بهذا التّرتيب. نسمّي O **المبدأ** ونعرّف الشّعاعين غير المرتبطين خطّياً $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ نسمّيهما **شعاعَي الأساس**. نرمز إلى **المَعْلَم** بالرمز $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونسمّي المستقيم (OI) **محور الفواصل** والمستقيم (OJ) **محور التراتيب**.

في المستوي هناك ثلاثة أنواع من المعالم، المَعْلَم الكيفي والمَعْلَم المتعامد والمَعْلَم المتجانس كما هو موضح في الشّكل الآتي :

مَعْلَم كيفي	مَعْلَم متعامد	مَعْلَم متجانس
	$(OI) \perp (OJ)$	$(OI) \perp (OJ)$ و $OI = OJ$

لنتأمّل مَعْلماً $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ في المستوي ولتكن M نقطة من المستوي.

- إذا لم تكن M واقعة على أحد محورَي المَعْلَم، أنشأنا من M موازياً لمحور التّراتيب (OJ) فيقطع محور الفواصل في P، وموازياً لمحور الفواصل (OI) فيقطع محور التّراتيب في Q. نستنتج أنّ الرّباعيّ $OPMQ$ متوازي الأضلاع وأنّ



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

ينتج مما سبق أنّه يوجد عددان حقيقيّان x و y بحيث يكون $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$ و $\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$ ومن ثَمّ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. ونقبل أنّ الثّنائيّة (x,y) التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ وحيدة.

▪ إذا كانت M على محور الفواصل فثمة عدد حقيقيّ x يحقّق $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. وإذا كانت M على محور التراتيب فثمّة عدد حقيقيّ y يحقّق $\overrightarrow{OM} = y\vec{j}$.

ومنه التّعريف الآتي :



تعريف

نقول إنّ (x,y) هما **إحداثيتا** النّقطة M في مَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ إذا وفقط إذا تحقّقت المساواة : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$، ونكتب $M(x,y)$.

نسمّي x **فاصلة** النّقطة M ونسمّي y **ترتيبها**.



يفيد اختيار مَعْلَم في المستوي في معالجة المسائل الهندسيّة بطرائق حسابيّة إذ نستعيض عن النّقطة M بزوج من الأعداد الحقيقيّة هو الثنائيّة (x,y) التي تمثّل إحداثيّتي النّقطة M.



مثال

لنتأمّل مَعْلَماً متعامداً $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ مثّل في المستوي النّقاط الآتية

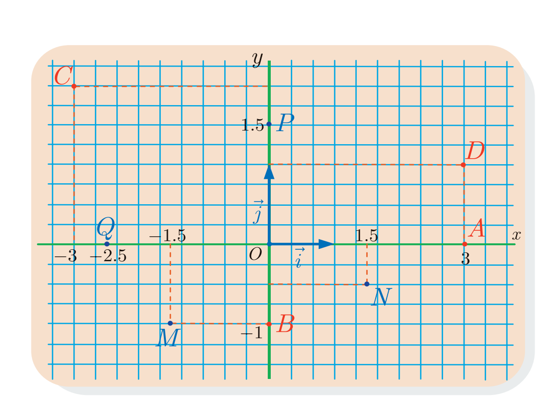
$$M\left(-1.5,-1\right) \text{ و } N\left(1.5,-0.5\right) \text{ و } P\left(0,1.5\right) \text{ و } Q\left(-2.5,0\right)$$

❷ مثّل في المستوي نفسه النّقاط A و B و C و D التي تُحقّق

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} \text{ و } \overrightarrow{OB} = -\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + \vec{j}.$$

الحل

❶ لنتذكّر أوّلاً أنّ الإحداثيّة الأولى تمثّل فاصلة النّقطة في حين أنّ الإحداثيّة الثّانية تمثّل ترتيب النّقطة. لمّا كانت فاصلة النّقطة P معدومة استنتجنا أنّها واقعة على محور التّراتيب. ولمّا كان ترتيب النّقطة Q معدوماً استنتجنا أنّها واقعة على محور الفواصل. أخيراً يبيّن الشّكل جانباً مواضع النّقطتين M و N.



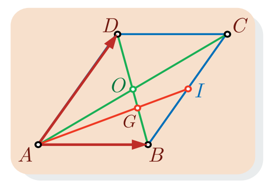
❷ لنبحث أوّلاً عن إحداثيّات النّقاط A و B و C و D. لمّا كان $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$ استنتجنا أنّ $A(3,0)$، وأنّ A تقع على محور الفواصل. ولمّا كان $\overrightarrow{OB} = -\vec{j}$ استنتجنا أنّ $B(0,-1)$ وأنّ B تقع على محور التّراتيب. ونجد بأسلوب مماثل أنّ $C(-3,2)$ و $D(3,1)$.



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. وليكن G مركز ثقل المثلّث ABC. عيّن إحداثيات النّقاط A و B و C و D و O و G في المَعلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.


لتعيين إحداثيتي نقطة M في مَعلَم $(A;\vec{u},\vec{v})$ يجب التعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة شعاعي الأساس $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

الحل



النّقطة A هي مبدأ المَعلَم إذن $A(0,0)$. والنّقطة B هي نهاية شعاع الأساس على محور الفواصل إذن $B(1,0)$. وبالأسلوب نفسه نجد أنّ $D(0,1)$.

ولمّا كان $ABCD$ متوازي أضلاع استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=1\cdot\overrightarrow{AB}+1\cdot\overrightarrow{AD}$، إذن $C(1,1)$. وكذلك نتذكّر أنّ O هي منتصف $[AC]$، إذن

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

ومنه $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

وأخيراً لتكن I منتصف $[BC]$. فيكون

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

أو $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$، فنجد أنّ $G\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

 الأشعّة ومركّباتها في مَعلَم

نثبّت في هذه الفقرة مَعلَماً $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- نتأمّل شعاعاً $\vec{u}$، ولتكن M النّقطة من المستوي التي تحقّق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$، ولتكن (x,y) إحداثيّتي النّقطة M. نعلم أنّ

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$$


ومن ثمّ يُكتب أيُّ شعاع $\vec{u}$ في المستوي بالصّيغة $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

- نسمّي (x,y) **مُركّبتي الشّعاع** $\vec{u}$ في المَعلَم $(O;\vec{i},\vec{j})$، ونكتب $\vec{u}(x,y)$ أو $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ تعبيراً عن ذلك. وكما سنرى، الكتابة الشّاقوليّة لمركّبات الأشعة مريحة جدّاً عند إجراء العمليّات على الأشعة.
- يتساوى الشّعاعان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ إذا وفقط إذا كان $x=x'$ و $y=y'$.

- إذا كان $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ وكان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ كان $\vec{w}\begin{bmatrix}x+x'\\y+y'\end{bmatrix}$.

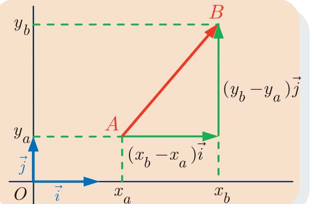


استناداً إلى الفرْض لدينا $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$، وعليه

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\vec{u}+\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j}\\&=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}\end{aligned}$$

- إذا كان $\vec{w}=k\vec{u}$، حيث k عددٌ حقيقيّ، وكان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ كان $\vec{w}\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$.

- **حساب مركّبات شعاع بدلالة إحداثيات بدايته ونهايته.** لتكن النّقطتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$ عندئذ يكون



$$\overrightarrow{AB}\left(x_b-x_a,y_b-y_a\right) \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}x_b-x_a\\y_b-y_a\end{bmatrix}$$

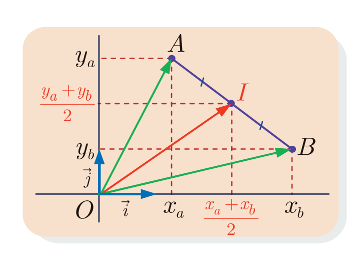


يمكننا أن نكتب انطلاقاً من علاقة شال : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$، ولمّا كان $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. ولكن

$$\overrightarrow{OB}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OA}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}$$

ومنه $\overrightarrow{OB}\left(x_b,y_b\right)$ و $\overrightarrow{OA}\left(x_a,y_a\right)$. وعليه تكون $\left(x_b-x_a,y_b-y_a\right)$ هي مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

تطبيقات هندسيّة



① **إحداثيّات منتصف قطعة مستقيمة** : لتكن لدينا النّقطتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$. عندئذ تعطى إحداثيّتا النّقطة I منتصف القطعة $[AB]$ بالعلاقتين :

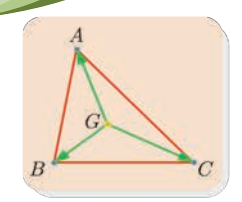
$$x_I=\frac{x_a+x_b}{2} \quad \text{و} \quad y_I=\frac{y_a+y_b}{2}$$



في الحقيقة، تُكتب المساواة $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ التي تعرّف النّقطة I ، بواسطة المركّبات، بالشّكل

$$\begin{bmatrix}x_a-x_I\\y_a-y_I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_b-x_I\\y_b-y_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

أو $x_a+x_b-2x_I=0$ و $y_a+y_b-2y_I=0$. ومنه نحسب x_I و y_I.



② **إحداثيات مركز ثقل مثلّث.** لتكن لدينا النّقاط $A(x_a, y_a)$ و $B(x_b, y_b)$ و $C(x_c, y_c)$. إنّ إحداثيتي G مركز ثقل المثلّث ABC هما :

$$x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

في الحقيقة، تُكتب المساواة $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ التي تعرّف النّقطة G، بواسطة المركّبات، بالشّكل

$$\begin{bmatrix} x_a - x_G \\ y_a - y_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b - x_G \\ y_b - y_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c - x_G \\ y_c - y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$x_a + x_b + x_c - 3x_G = 0 \quad \text{و} \quad y_a + y_b + y_c - 3y_G = 0 .$$

ومنه نحسب x_G و y_G.

③ **الارتباط الخطي.** يكون الشّعاعان غير المعدومين $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ مرتبطين خطّياً إذا وفقط إذا تحقّقت العلاقة : $x\,y' - y\,x' = 0$.

لنفترض أنّ $x \neq 0$ و $y \neq 0$. يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي k يحقق $\vec{v} = k\vec{u}$، أو $\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$، وهذا يُكافئ كون النسبتان $\frac{x'}{x}$ و $\frac{y'}{y}$ متساويتين. أي $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$، وتعلم أنّ هذا يُكافئ استناداً إلى قاعدة الضرب التّقاطعي أن يكون $xy' = yx'$.

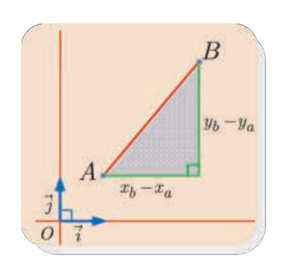
تمتاز الصّيغة $x\,y' - y\,x' = 0$ بعدم احتوائها على مقامات، فهي تُبقي الخاصة صحيحة حتى في حالة كون $x = 0$، أو $y = 0$، ونترك هذا التحقق للقارئ.



ليكن الشّعاعان $\vec{u}\left(\sqrt{3} - 1, \sqrt{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1\right)$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$xy' - x'y = \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 - 2 = 0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.



④ **المسافة بين نقطتين**. نفترض في هذه الفقرة أنّ **المَعْلَم** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ **متجانسٌ**.

لتكن لدينا النقطتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$. عندئذ تعطى المسافة بين النّقطتين A و B بالعلاقة :

$$AB=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}\,.$$

وذلك بالاستفادة من مبرهنة فيثاغورث.

وبوجه خاص إذا كان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ كان طول الشّعاع $\vec{u}$ مساوياً $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.



فكّر

لماذا لا يمكن استعمال علاقة المسافة بين نقطتين في مَعْلَم غير متجانس ؟



تدرّب

① ادرس، في الحالات الآتية، الإرتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

❶ $\vec{u}\left(2,-3\right)$ و $\vec{v}\left(-6,9\right)$.

❷ $\vec{u}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

❸ $\vec{u}\left(3,-2\right)$ و $\vec{v}\left(6,-1\right)$.

❹ $\vec{u}\left(10,-5\right)$ و $\vec{v}\left(-4,2\right)$.

② نتأمّل في مَعْلَم النّقاط $A(-2,4)$ و $B(4,2)$ و $C(0,-1)$ و $D(-3,0)$. لتكن E منتصف $[AB]$. عيّن طبيعة الرّباعييّن $ABCD$ و $AECD$.

③ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ و $C(-2,-1)$ احسب أطوال أضلاع المثلّث ABC واستنتج نوعه.

④ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-2,3)$ و $B(4,5)$ و $C(0,5)$ و $D(5,1)$.

❶ احسب محيط المثلّث ABC.

❷ احسب إحداثيتي N منتصف القطعة CB ثم استنتج طول المتوسّط AN.

❸ احسب مركّبات الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

❹ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان.

فيما يلي، نفترض k عدداً حقيقياً.

❺ اكتب، بدلالة k، إحداثيّتي النّقطة M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

❻ احسب، بدلالة k، مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$.

❼ عيّن k كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً. واستنتج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

تمرينات ومسائل

1 بيّن الإجابات الصّحيحة من بين الإجابات المقترحة في كلّ من الحالات الآتية :

- ليكن ABC مثلّثاً، مركز ثقله G، ومنتصف القطعة $[AC]$ هو J، عندئذ :

❶ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ ❷ $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ ❸ $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$

- في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، نفترض أنّ $\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{i}-1.5\vec{j}$، عندئذ :

❶ OMN مثلّث. ❷ O و M و N على استقامة واحدة. ❸ $\overrightarrow{MN}=3\vec{i}-4.5\vec{j}$

- لنتأمّل في المَعْلَم المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقاط $A(4,5)$ و $B(2,1)$ و $C(8,3)$. عندئذ :

❶ $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان. ❷ $\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}\overrightarrow{AB}$. ❸ ABC قائم ومتساوي السّاقين.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقاط $A(2,0)$ و $B(6,2)$ و $C(3,5)$ و $D(1,4)$. عندئذ :

❶ (AB) و (CD) متقاطعان. ❷ $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ❸ $ABCD$ شبه منحرف.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقطة $A(2,0)$، والشّعاع $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$. ولتكن النقطة $M\left(x,y\right)$ المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$. عندئذ :

❶ $x=1$ و $y=-7$. ❷ $x=1$ و $y=3$. ❸ A هي صورة M وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\vec{u}$.

2 ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A. عيِّن النّقاط M و N و P و Q المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\quad,\quad\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\quad,\quad\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$$

3 لتكن A و B و C و D أربع نقاط في المستوي. أثبت أنّ :

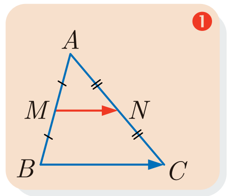
- $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{DA}$.
- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

4 ليكن $ABCDEF$ مسدّساً منتظماً مركزه O. نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. اكتب الأشعّة $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{DB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

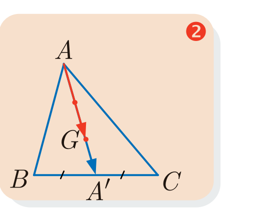
لنتعلّم البحث معاً



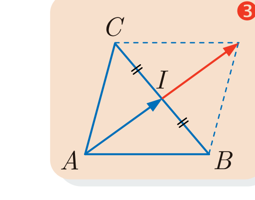
يقابل كلّ شكل من الأشكال الآتية خاصّة مهمّة. من المفيد إذن تمييز هذه الأشكال في رسمٍ معطى. نقول إنّ هذه الأشكالّ أشكالٌ مفتاحيّة. ومعرفتك بها مفيدة في حل المسائل.



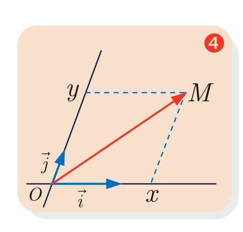
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$



$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

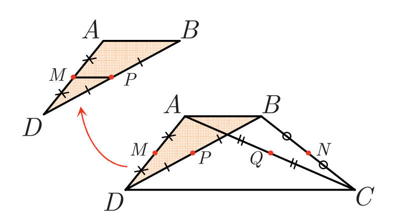
5 الوقوع على استقامة واحدة

الفرْض : ليكن $ABCD$ رباعيّاً فيه $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$، ولتكن M منتصف $[AD]$، و N منتصف $[BC]$، و P منتصف $[BD]$، وأخيراً Q منتصف $[AC]$.

الطلب : إثبات أنّ النّقاط M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.



نحو الحلّ



- ارسم الشّكل . وسمِّ النّقاط فيه.
- استخلاص النتائج المباشرة.

- من $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ نستنتج أنّ الرّباعيّ $ABCD$ شبه منحرف، لماذا ؟
- النّقطة M منتصف $[AD]$، و P منتصف $[BD]$، فنجد في المثلّث ABD الشّكل المفتاحي ❶، ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{AB}$؟
- أوجد بأسلوب مماثل العلاقات التي تربط $\overrightarrow{MQ}$ و $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{PN}$ و $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{QN}$ و $\overrightarrow{AB}$.
- صار إثبات المطلوب يسيراً انطلاقاً مما استخلصناه أعلاه.

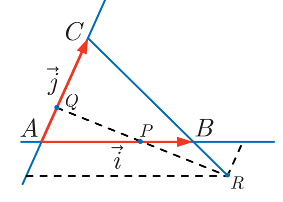
أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 ترجمة العلاقات الشّعاعيّة

الفرْض : ليكن ABC مثلّثاً. نعرّف $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ ، والنّقاط P و Q و R بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{i},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{j},\quad \overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

الطلب : إثبات أنّ النّقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.





نحو الحلّ

- **ارسم الشّكل .** وسمِّ النّقاط فيه.
- **استخلاص النتائج المباشرة.**

- نتعرّف مباشرة الشّكل المفتاحي ❹. ولدينا فرضاً عبارتا الشّعاعين $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. استنتج إحداثيات كلٍّ من النقطتين P و Q في المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$.
- في المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، إحداثيّات B و C معروفة، إذن يمكننا منها استنتاج إحداثيّتي R في المَعْلَم نفسه ؟
- بعد أن عيّنّا إحداثيّات النّقاط P و Q و R في المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ صار من اليسير إثبات أنّ P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.



7 نقاط معرّفة بعلاقات شعاعيّة

ليكن المثلّث ABC . أنشئ النّقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين الشّعاعيّتين الآتيتين :

$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}\qquad (1)$$
$$\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AC}\qquad (2)$$

نحو الحلّ

- **مرحلة الإنشاء الهندسي.** أنشئ مثلّثاً ABC .
- **بحثاً عن نتائج مباشرة.** في هذا التّمرين لا يعطينا الرسم أيّة معلومات إضافيّة.
- **بحثاً عن طريق.**

بوجه عام، إذا كانت النّقطة D معطاة، وكان الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً، أمكننا تعيين النّقطة P المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{DP}=\vec{u}$. ومن هنا تأتي فكرة تحويل كلّ من العلاقتين (1) و (2) إلى الحالة السّابقة أي التي تظهر فيها النّقطة المراد تعيينها مرّة واحدة ويكون الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً.

- في العلاقة (1) تظهر النّقطة M، المراد تعيينها، مرّة واحدة وهذا يدعونا إلى كتابة العلاقة بالصّيغة $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. علّل عندئذ صحة المساواة $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$ وأنشئ النّقطة M.
- في العلاقة (2) تظهر النّقطة المراد تعيينها مرّتين فعلينا إذن تحويل العلاقة (2) باستعمال علاقة شال. أثبت على سبيل المثال أنّ $3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. أنشئ الآن النّقطة N بالطّريقة نفسها التي أنشأتَ بها النّقطة M.

8 إثبات شعاعي

لنتأمّل مثلّثاً ABC مركز ثقله G، ولتكن A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، و D نظيرة G بالنِّسبة إلى النّقطة A'. أثبت شعاعيّاً أنّ G منتصف القطعة $[AD]$.

نحو الحلّ

- مرحلة الإنشاء الهندسي. ارسم مثلّثاً ABC وعيّن بدقّة النّقاط A' و G و D.
- بحثاً عن نتائج مباشرة. عبّر عن كون G مركز ثقل المثلّث ABC بالعلاقات الشّعاعيّة المناسبة ثمّ عبّر عن كون D نظيرة G بالنّسبة للنقطة A' بعلاقة شعاعيّة.
- بحثاً عن طريق.

لإثبات أنّ النّقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$ تكفي مقارنة الشّعاعين $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GD}$. تدعونا العلاقات التي وجدناها سابقاً إلى التعبير عن كلّ من هذين الشّعاعين بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{GA'}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبه بلغةٍ سليمة.

9 ثلاثة مربعات

$ABCD$ و $DCEF$ و $FEGH$ ثلاثة مربّعات طولُ ضلع كلّ منها يساوي 1. النقطة I منتصف القطعة $[AC]$، و J نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و (AH). مستعيناً بمَعْلَم مناسب أثبت أنّ النّقاط I و F و J تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

- مرحلة الإنشاء الهندسي. لنرسم أوّلاً الشّكل رسماً دقيقاً ولنختر المَعْلَم $(A;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\overrightarrow{AD}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المربّعات أعداداً صحيحة.
- بحثاً عن نتائج مباشرة. نلاحظ أنّه يمكننا تحديد إحداثيّات جميع النّقاط تحديداً مباشراً عدا إحداثيتي النّقطة J. عبّر إذن إحداثيّات هذه النّقاط باستثناء النّقطة J.

3

بحثاً عن طريق.

نريد إثبات وقوع النّقاط I و J و F على استقامة واحدة، علينا إذن البحث عن إحداثيّتي النّقطة J. ما العلاقة التي تربط الشّعاع $\overrightarrow{AJ}$ بالشّعاع $\overrightarrow{AH}$؟ استنتج إحداثيّتي النّقطة J.

أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 الوقوع على استقامة واحدة بطريقتين

لنتأمّل مثلّثاً ABC قائم الزّاوية في A، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$، و J نظير C بالنسبة إلى النّقطة A، وأخيراً لتكن K النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

أثبت أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

مرحلة الإنشاء الهندسي. ارسم المثلّث، وعيّن النّقاط بدقة، وضع علامات على القطع المستقيمة متساوية الطول.

بحثاً عن نتائج مباشرة. يمكننا انطلاقاً من فرضيّات المسألة كتابة عدد من العلاقات الشّعاعيّة كأن نعبّر عن $\overrightarrow{AJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$، وعن $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{BI}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$. اكتب هذه العلاقات.

بحثاً عن طريق.

نريد إثبات أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة، علينا إذن إثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$. يمكن الوصول إلى هذه النّتيجة إمّا بالحساب الشّعاعي أو بطرائق الهندسة التحليليّة أي باختيار مَعْلَم مناسب. هناك إذن طريقتان.

- الطريقة الأولى

لنختر المَعلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المثلّث ABC أعداداً صحيحة، كما يجعل من السهل تحديد إحداثيّات باقي النّقاط. ما هي إحداثيّات كلٍّ من B و C و I و J؟ استنتج ممّا سبق إحداثيّتي النّقطة K.

أنجز البرهان واكتبه بلغة سليمة.

- الطريقة الثانية

لإثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ نفرّق كلاً منهما إلى مجموعٍ شعاعيّ. تعلم أنّ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$ استنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

يتطلّب التعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بعض الجهد : تعلم أنّ $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}$.
أثبت أوّلاً أنّ $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$، ثُمّ استنتج عبارة $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. أخيراً أثبت أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 لنتأمّل مثلّثاً ABC، ولتكن I نظيرة A بالنّسبة إلى النّقطة B، و K صورة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$، و M نقطة تقاطع المستقيمين (CK) و (AB).

① أثبت أنّ النّقطة M هي منتصف القطعة $[KC]$.

② ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BM}$؟ استنتج أنّ B هي مركز ثقل المثلّث CKI.

12 نتأمّل مثلّثاً ABC، ونسمّي I منتصف القطعة $[AB]$.

① ❶ أنشئ النّقطة J التي تحقّق $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

② لتكن النّقطة K المحقّقة للعلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ ثمّ أنشئ النّقطة K.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ وأن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$. ماذا يمكنك القول عن النّقاط I و J و K في هذه الحالة ؟

13 ليكن متوازي الأضلاع $ABCD$، ولتكن E النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و G النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. نرسم من E مستقيماً يوازي المستقيم (AD) فيقطع المستقيم (CD) في النّقطة F، ونرسم من G مستقيماً يوازي المستقيم (AB) فيقطع المستقيم (BC) في النّقطة H.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ وأنّ $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

14 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. بيّن في كلٍّ من الحالات التالية إذا كانت النّقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

- $P(-5,5)$، $N(7,-3)$، $M(4,-1)$
- $P(-5,14)$، $N(-3,7)$، $M(-2,3)$.
- $P(0,1)$، $N(3,-1)$، $M\left(2,-\frac{1}{3}\right)$

15 لتكن النّقاط $A(3,7)$ و $B(8,2)$ و $C(-4,-2)$ والشّعاع $\vec{u}\left(2,5\right)$. نقرن بكلّ عدد حقيقيّ k النّقطة M المحقّقة للعلاقة : $\overrightarrow{CM}=k\vec{u}$.

① احسب إحداثيّتي النّقطة M بدلالة k واستنتج مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AM}$.

② باستعمال الشرط التحليليّ لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ احسب العدد الحقيقيّ k الّذي يجعل M نقطة من المستقيم (AB).

16 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ونتأمّل النّقاط $A\left(-3,0\right)$ و $B\left(6,3\right)$ و $C\left(1,8\right)$.
نهدف إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC.

① القول إنّ K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، يكافئ القول إنّ K متساوية البعد عن رؤوس المثلّث، إذن $KA=KC$ و $KA=KB$. احسب المقادير KA^2 و KB^2 و KC^2 بدلالة x و y ثمّ اكتب العلاقات النّاتجة من الشّرط السّابق.

② استنتج أنّ $x+2y=7$ و $3x+y=6$.

③ احسب إحداثيّتي النقطة K.

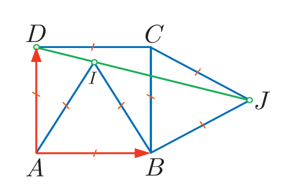
17 ليكن متوازي الأضلاع $OIJK$، ولتكن النّقاط A و B و G المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OI},\quad \overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OK},\quad \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

اختر مَعْلَماً مناسباً وأثبت أنّ النّقاط O و G و J على استقامة واحدة.

18 لتكن النّقاط $A\left(1,2\right)$ و $B\left(6,0\right)$ و $C\left(2,5\right)$. احسب إحداثيّتي النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

19 ليكن المربّع $ABCD$. AIB و BJC مثلّثان متساويا الأضلاع ومتوضّعان كما هو مبيّن في الشّكل المجاور.



يهدف التّمرين إلى إثبات أنّ النقط D و I و J تقع على استقامة واحدة بأسلوبين مختلفين.

① الطريقة الأولى. استعمال الزّوايا

❶ احسب قياس كلٍّ من الزّوايا $\angle DIA$ و $\angle AIB$ و $\angle BIJ$.

❷ بيّن أنّ $\angle DIJ=180°$. ماذا تستنتج؟

② الطريقة الثانية. اختيار مَعْلَم مناسب.

اختر مَعْلَماً مناسباً، ثُمّ احسب إحداثيّات النّقاط D و I و J ثمّ أثبت أنّها تقع على استقامة واحدة.

20 ليكن ABC مثلثاً. ولتكن A' و B' و C' منتصفات الأضلاع $[BC]$، $[CA]$ و $[AB]$ بالتّرتيب، ولتكن النّقطة O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. ثُمّ لنتأمّل النّقطة H التي تحقّق

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

① ❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

❷ استنتج أنّ (AH) هو الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABC.

❸ أثبت بأسلوب مماثل أنّ (BH) هو الارتفاع النازل من الرأس B في المثلث ABC. ماذا تمثّل النّقطة H بالنِّسبة إلى المثلّث ABC ؟

② لتكن النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

❶ أثبت أنّه أياً كانت النّقطة M من المستوي كان $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

❷ أثبت بالاستفادة من الفقرة السابقة أنّ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$. ماذا تستنتج بشأن النّقاط O و G و H ؟

4

معادلة مستقيم
وجمل المعادلات الخطيّة

1. مقدّمة عامّة
2. معادلة مستقيـم
3. جمل المعادلات الخطيّة



يُنْظَر إلى محمدٍ بن موسى الخوارزمي (850-780) المولود في بغداد على أنه أوّل علماء الرّياضيّات العرب. يُعالج مؤلَّفه: **«الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة»** مسائل جبريّة من الحياة اليومية.

إليكم كيف كان الخوارزمي يكتب : "هذا الشيء الذي أبحث عنه، سأبدأ بإعطائه اسماً، ولكن لأنّني لا أعرفه، ولأنّني في الحقيقة أبحث عنه، فسأسميه ببساطة : الشيء" إنّه المقدار المجهول، الّذي كان يبحث عنه، والآن فقط أصبح بإمكانه العمل به. فمع أنّ هذا الشيء ما يزال مجهولاً ولكن صار بالإمكان استعماله في الحساب وكأنّه مقدار معلوم. كانت هذه ببساطة استراتيجية الخوارزمي وتجلّي عبقريته، وأعظم اختراعاته. كان الخوارزمي يتعامل مع المجهول بأسلوب التعامل مع المقادير المعلومة نفسه، فكان يجمعُه ويضربُه، وكان كلّ ذلك بهدف واحد هو كشف النقاب عن قيمته الحقيقيّة، هذا هو سحر الجبر.

4

معادلة مستقيم وجمل المعادلات الخطيّة

1 مقدّمة عامّة

لنتذكّر أنّ **المعادلة الخطيّة بمجهولين x و y** هي معادلة من الشّكل : $ax + by = c$. نقول إنّ الثنائيّة (u,v) هي **حلٌّ** لهذه المعادلة إذا تحقّقت المساواة : $au + bv = c$.



إنّ المعادلة $2x + y = 5$ معادلةٌ خطّيّة. الثنائيّة $(1,3)$ حلّ لهذه المعادلة لأنّ $2\times1+1\times3=5$.

أمّا الثنائيّة $(1,2)$ فليست حلاً لها لأنّ $2\times1+1\times2$ لا يساوي 5.

في مَعْلَم، تكوّن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثيّاتها المعادلة $2x + y = 5$، مستقيماً هو الخطّ البياني الممثّل للتابع التآلفي : $f : x \to -2x+5$.

وتأخذ **جملة معادلتين خطّيّتين بمجهولين x و y** الشكل الآتي :

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} a\,x\ + b\,y = c \\ a'x\ + b'y = c' \end{cases}$$

نقول إنّ الثّنائيّة (u,v) هي **حلّ** لهذه الجملة $(\mathcal{S})$ إذا كانت هذه الثّنائيّة حلاً لكلٍّ من المعادلتين الخطّيّتين $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ في آنٍ معاً. وحلّ الجملة $(\mathcal{S})$ هو عمليّة إيجاد الثّنائيّات التي تكوّن حلولاً لهذه الجملة.



لنتأمّل الجملة

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} 3x\ -4y = 11 \\ 2x\ +3y = 13 \end{cases}$$

تمثّل الثّنائيّة $(5,1)$ حلاً للجملة $(\mathcal{S})$، لأنّ

$$3\times5-4\times1=11$$

و

$$2\times5+3\times1=13$$



تدرّب

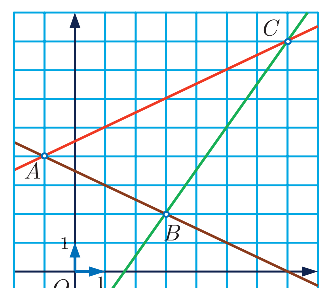
① تأمّل المعادلة $(\mathcal{E})$ التالية : $-2x+3y=5$. عيّن، من بين الثنائيّات الآتية، تلك التي تمثّل حلولاً للمعادلة $(\mathcal{E})$:

❶ $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ ❷ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ ❸ $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$

❹ $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ ❺ $\left(\frac{1}{2},2\right)$ ❻ $(-2,1)$

② مثّلنا في مَعْلَم متجانس، التوابع التآلفيّة، (من الدّرجة الأولى) الآتية :

☝ $f : x \to \frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ ✌ $g : x \to \frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ 👌 $h : x \to -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$



❶ تنتمي النّقطة $A(-1,4)$ إلى مستقيمين، دلَّ عليهما ؟

❷ استنتج جملةَ معادلتين خطيّتين تكون إحداثيّات A حلاً لها.

❸ أعد حلّ الطّلبين السّابقين في حالة $B(3,2)$ ثُمّ $C(7,8)$.

② معادلة مستقيم

نثبّتُ في هذه الفقرة مَعْلَماً **كيفيّاً** $(O;\vec{i},\vec{j})$ في المستوي.



المستقيمات والتّوابع التّآلفيّة



ليكن f التابع التآلفي المعرف بالصيغة $f(x)=2x-3$.

① ❶ احسب المقادير $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$. ثم ارسم بدقة النّقاط $A(0,f(0))$ و $B(1,f(1))$ و $C(2,f(2))$.

❷ أتقع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة ؟

② ❶ ارسم المستقيم Δ المارّ بالنّقطتين A و B، واختر عليه نقطةً M واحسب من الشكل إحداثيتيها (u,v) مراعياً الدقة.

❷ أتتحقّق المساواة $v=f(u)=2u-3$ ؟

③ ماذا تستنتج من ① و ② ؟

4

مبرهنة

① التّمثيل البياني لتابع تآلفي، أي من الصيغة $x \mapsto mx + p$، هو مستقيم.

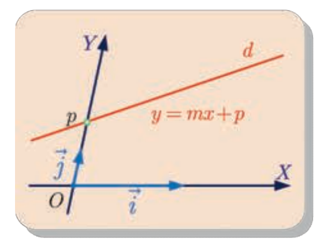
② كل مستقيم، لا يوازي محور التراتيب، هو التمثيل البياني لتابع تآلفي.

نتيجة

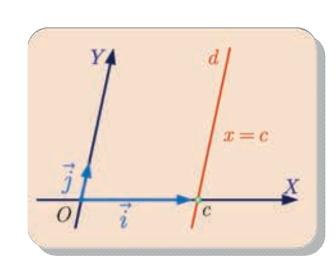
في مَعْلَم كيفيّ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. كلُّ مستقيم d له معادلةٌ من أحد الشكلين التاليين :

① $y = mx + p$ إذا لم يكن d موازياً لمحور التّراتيب.

② $x = c$ إذا كان d موازياً لمحور التراتيب.



في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة السابقة، إذا لم يكن المستقيم d موازياً لمحور التّراتيب، كان d الخطّ البيانيّ لتابع تآلفي $f : x \mapsto mx + p$، وبناءً عليه، كانت $y = f(x) = mx + p$ معادلةً للمستقيم d.



أمّا إذا كان d موازياً لمحور التراتيب، قطع d محور الفواصل في نقطة فاصلتها c. جميع النّقاط ذات الفاصلة c تنتمي إلى d، وبالعكس، لكلّ نقاط d الفاصلة c نفسها. إذن $x = c$ هي معادلة للمستقيم d.



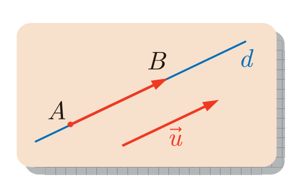
فكّر

لتكن d_1 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $2y + 3x = -1$، ولتكن d_2 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. قارن بين d_1 و d_2. ماذا تستنتج بشأن معادلة مستقيم بوجه عام ؟ هل هي وحيدة ؟



الشعاع الموجِّه لمستقيم وميل مستقيم





ليكن d مستقيماً، نقول إنّ الشعاع $\vec{u}$ **شعاعٌ موجِّه للمستقيم d**. إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$، وكان منحى $\vec{u}$ موازياً للمستقيم d أو منطبقاً عليه.

خواص

① إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين من مستقيم d، كان الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

② إذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d وكان k عدداً حقيقيّاً غير معدوم كان $k\vec{u}$ أيضاً شعاعاً موجِّهاً للمستقيم d. إذْ للشعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه هو منحى d.

③ يكون أيُّ شعاعين موجِّهين للمستقيم نفسه d مرتبطين خطّيّاً لأنّ لهما المنحى نفسه هو منحى d.

④ إذا كانت $y = mx + p$ معادلة للمستقيم d، كان $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

المستقيم d يمرّ بالنقطتين المختلفتين $A(0,p)$ و $B(1,m+p)$، إذن، الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d، ولكن $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}1-0\\(m+p)-p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$.

⑤ إذا كان $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعاً موجّهاً لمستقيم d كان للمستقيم d معادلة من الشّكل $y = mx + p$.

للمستقيم d منحى الشعاع $\vec{u}$ فهو لا يوازي محور التّراتيب، وله، من ثَمّ، معادلة من الشكل $y = m'x + p$. واستناداً إلى النقطة ④ السابقة نرى أنّ الشّعاع $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\m'\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجِّه للمستقيم d، فلا بُد أن يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّيّاً ومنه $1\times m - 1\times m' = 0$ أي $m = m'$.



ليكن d مستقيماً لا يوازي محور التراتيب. عندئذ يقبل هذا المستقيم معادلة وحيدة من الشكل $y = mx + p$. نسمي العدد m **ميل المستقيم** d.



إذن في حالة مستقيم d لا يوازي محور التراتيب. هناك تكافؤ بين القول إنّ ميله يساوي m أو إنّ $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ هو شعاع توجيه له.

 المستقيمات المتوازية



ليكن المستقيم d الذي معادلته $y = mx + p$ والمستقيم d' الذي معادلته $y = m'x + p'$. إنّ توازي المستقيمين d و d' يُكافِئ تساوي ميليهما أي $m = m'$.



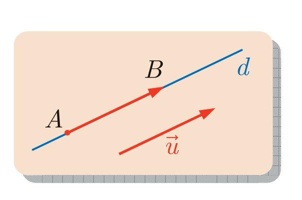
إنّ $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d، و $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\m'\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d'. ولكن أن نقول إنّ d و d' متوازيان يكافئ قولنا إنّ لهما المنحى نفسه، أي إنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّيّاً وهذا يكافئ $1 \times m - 1 \times m' = 0$ أو $m = m'$.

مثال

- المستقيمان d و d' اللّذان معادلتاهما $y = 3x + 5$ و $y = 3x - 2$ متوازيان.
- أمّا المستقيمان d و d' اللّذان معادلتاهما $y = 2x + 5$ و $y = 3x + 5$ فهما غير متوازيين.

معادلة مستقيم عُلم منه نقطة وشعاع موجّه

لتكن A نقطة من مستقيم d و $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً له. إذا تأمّلنا النّقطة B الّتي تحقّق $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. لاحظنا أنّ المستقيم d هو المستقيم (AB) نفسه. إذن تعيّن النّقطة A والشّعاع $\vec{u}$ المستقيم d.



مثال

① لنتأمّل النّقطة $A(2,3)$ والشّعاع $\vec{u}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$. أعطِ معادلة للمستقيم d الذي يمرّ بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً.

② أوجد معادلة للمستقيم d الذي يمرّ بالنّقطة $A(-1,1)$ موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$.

الحل

① لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي. تنتمي M إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطّيّاً. ولكنّ مركّبتي الشّعاع $\overrightarrow{AM}$ هما $\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$، وشرط الارتباط الخطّيّ للشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ هو :

$$(x-2)\times(-2)-(y-3)\times 3=0$$

أو $-2x-3y+13=0$، والمعادلة المختزلة للمستقيم d هي : $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$.

② لمّا كان Δ لا يوازي محور التّراتيب، استنتجنا أنّ d أيضاً لا يوازي محور التّراتيب وله معادلة من الصيغة $y=mx+p$. ولمّا كان d و Δ متوازيين استنتجنا أنّ لهما الميل نفسه أي $m=2$.
فللمستقيم d معادلة من الشكل $y=2x+p$.
ولكنّ A نقطة من d إذن يجب أن تحقّق إحداثيّاتها معادلة هذا المستقيم أي $1=2\times(-1)+p$ أو $p=3$. بالنتيجة تكون $y=2x+3$ معادلة للمستقيم d.

ويمكننا بوجه عام اتباع أسلوب حل هذا المثال في إثبات المبرهنة الآتية :



مُبرهَنة

لتكن النّقطة $A(x_a,y_a)$ والشّعاع غير المعدوم $\vec{u}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$، وليكن d المستقيم المارّ بالنّقطتين A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً، عندئذ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية :

$$\alpha(y-y_a)-\beta(x-x_a)=0$$



في الحقيقة، تنتمي النّقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشعاعان

$$\vec{u}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AM}\begin{bmatrix} x-x_a \\ y-y_a \end{bmatrix}$$

مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ

$$\alpha(y-y_a)-\beta(x-x_a)=0$$

ثُم يمكننا إصلاح هذه الصيّغة لإعطائها الشّكل المألوف لمعادلة المستقيم.



معادلة مستقيم عُلم منه نقطتان

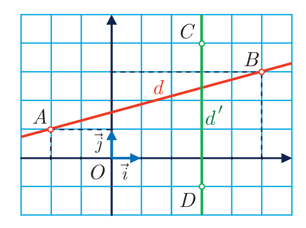
مثال

نُعطي، في مَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، النّقاط الأربع : $A(-2,1)$ و $B(5,3)$ و $C(3,4)$ و $D(3,-1)$.

① أوجد معادلةً للمستقيم d المارّ بالنقطتين A و B.

② أوجد معادلةً للمستقيم d' المارّ بالنقطتين C و D.

الحل



① في الحقيقة، تنتمي النّقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كانت النّقاط M و A و B على استقامة واحدة وهذا يُكافئ القول إنّ الشّعاعين $\overrightarrow{AM}\begin{bmatrix}x+2\\y-1\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$، مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ :

$$7(y-1)-2(x+2)=0$$

أو $7y-2x-11=0$ أو $y=\dfrac{2}{7}x+\dfrac{11}{7}$، وهي معادلةٌ للمستقيم d.

② للنقطتين C و D الفاصلة 3 نفسها. إذن d' يوازي محور التراتيب ويقبل $x=3$ معادلة له.

يمكن تعميم أسلوب حل هذا المثال، وسنتبعه في إثبات المبرهنة الآتية :



مُبرهَنة

لتكن النّقطتان المختلفتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$، وليكن d المستقيم المارّ بالنّقطتين A و B، عندئذ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية :

$$(x_b-x_a)(y-y_a)-(y_b-y_a)(x-x_a)=0$$



في الحقيقة، تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشّعاعان

$$\overrightarrow{AM}\begin{bmatrix}x-x_a\\y-y_a\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}x_b-x_a\\y_b-y_a\end{bmatrix}$$

مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ

$$(x_b-x_a)(y-y_a)-(y_b-y_a)(x-x_a)=0$$

ثُم يمكننا إصلاح هذه الصّيغة لإعطائها الشّكل المألوف لمعادلة المستقيم.



① نزوّد المستوي بمعلَم. بيّن الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يأتي:

- $y=\frac{3}{2}x-1$ هي معادلة d. شعاعٌ موجِّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}-1\\1.5\end{bmatrix}$.

- $y=-\frac{1}{2}x+4$ هي معادلة d. شعاعٌ موجِّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}-0.5\\4\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$.

- $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ هو شعاع موجِّه للمستقيم الذي معادلته:

❶ $y=3x+2$. ❷ $y=-\frac{3}{2}x+1$. ❸ $y=\frac{3}{2}x$.

- معادلة المستقيم d المارّ بالنّقطة $A(2,1)$ موازياً المستقيم Δ الذي معادلته $y=3x-1$ هي :

❶ $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. ❷ $y=3x-5$. ❷ $y=3x$.

② ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}$. عيّن العدد t كي تقع النقطة $M(t,3)$ على d.

③ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً في الحالتين الآتيتين:

❶ $A(-4,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ ❷ $A(5,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

④ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطتين A و B في الحالتين الآتيتين :

❶ $A(2,1)$ و $B(3,-1)$ ❷ $A(-5,0)$ و $B(2,-3)$

⑤ نتأمّل المثلّث ABC حيث $A(1,3)$ و $B(-3,5)$ و $C(-1,-1)$.

❶ عيّن إحداثيتي النّقطة A' منتصف $[BC]$، وإحداثيتي النّقطة B' منتصف $[AC]$.

❷ اكتب معادلة المتوسط d_1 المتعلق بالرأس A.

❸ اكتب معادلة المستقيم Δ المار بالنقطتين A و B.

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ' المار بالنقطتين A' و B'. ماذا تقول عن المستقيمين Δ و Δ'.

جمل المعادلات الخطية

نهدف في هذه الفقرة إلى دراسة جملة المعادلتين $(\mathcal{S})$ دراسة بيانيّة

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} a\,x\ + b\,y\ = c \\ a'x\ + b'y\ = c' \end{cases}$$



الحالة المألوفة : $b \neq 0$ و $b' \neq 0$

في هذه الحالة تكافئ المعادلةُ $ax + by = c$ المعادلةَ: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. (1)

وكذلك تكافئ المعادلةُ $a'x + b'y = c'$ المعادلةَ : $y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}$. (2)

لنختر مَعْلَماً في المستوي، ولنرمز بالرّمز d إلى المستقيم الذي معادلته (1)، وبالرّمز d' إلى المستقيم الذي معادلته المختزلة هي (2).

أن نقول إنّ الإحداثيّات (u,v) لنقطة M من المستوي هي حلٌّ للجملة $(\mathcal{S})$ يعني أنّ

$$v = -\frac{a}{b}u + \frac{c}{b} \quad \text{و} \quad v = -\frac{a'}{b'}u + \frac{c'}{b'}$$

وهذا يُكافئ انتماء النقطة M إلى المستقيمين d و d' في آن معاً.

إذن يؤول حلّ الجملة $(\mathcal{S})$ إلى إيجاد النقاط المشتركة بين المستقيمين d و d'. نميز ثلاث حالات ممكنة هي :

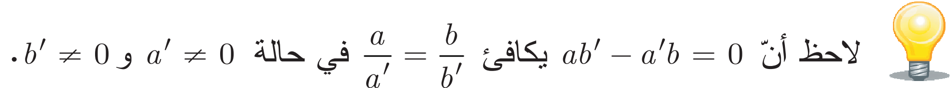
1. المستقيمان d و d' متقاطعان ومن ثَمّ، **تقبل الجملة $(\mathcal{S})$ حلاً وحيداً**.
2. المستقيمان d و d' متوازيان وغير منطبقين **فليس للجملة $(\mathcal{S})$ أيّ حلّ**.
3. المستقيمان d و d' منطبقان ومن ثَمّ **تقبل الجملة $(\mathcal{S})$ عدداً غير منته من الحلول**.

ولكن يكون المستقيمان d و d' متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما الميل نفسه أي $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ أو بأسلوب مُكافئ : $ab' - a'b = 0$.

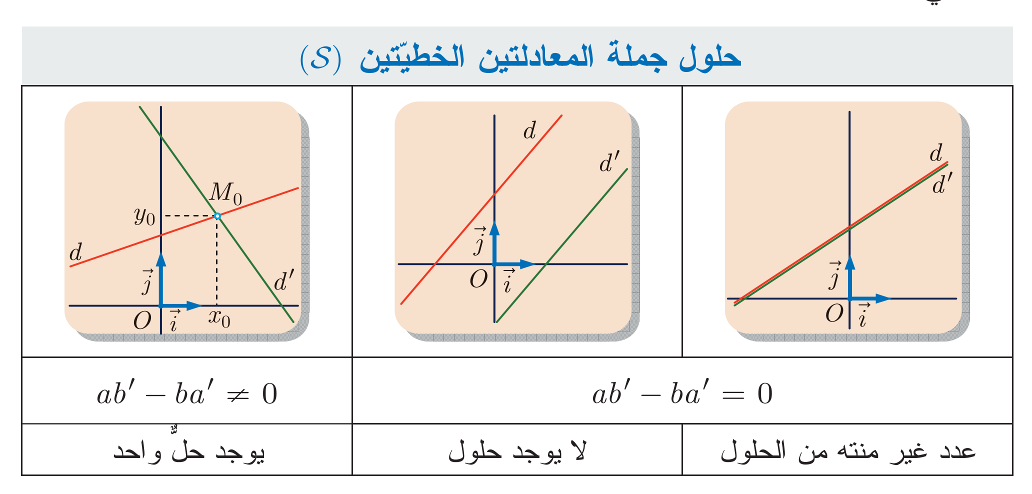
وعليه، يكون المستقيمان d و d' متقاطعين إذا وفقط إذا كان

$$ab' - a'b \neq 0$$

نسمّي العدد $ab' - a'b$ **مُحدّد الجملة**.



لاحظ أنّ $ab' - a'b = 0$ يكافئ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ في حالة $a' \neq 0$ و $b' \neq 0$.

يبيّن الشكل الآتي الحالات السّابقة جميعاً :



عدد غير منته من الحلول	لا يوجد حلول	يوجد حلٌّ واحد
$ab' - ba' = 0$		$ab' - ba' \neq 0$



الحالة الخاصّة : $b = 0$ أو $b' = 0$

في هذه الحالة، واحدٌ على الأقلّ من المستقيمين d و d' يوازي محور التّراتيب، فإذا كان $b = 0$، مثلاً، أخذت المعادلة $ax + by = c$ الشكل $ax = c$ أو $x = \frac{c}{a}$ في حالة $a \neq 0$. في هذه الحالة تسهل علينا معرفة إذا كان d و d' متقاطعين أو متوازيين وغير منطبقين أو منطبقين.

مثال حلّ جملة معادلتين خطيّتين عندما يكون المستقيمان الموافقان متقاطعين.

حلّ الجملة المعادلتين الخطيّتين $(\mathcal{S})$ الآتية

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 4x - 3y = 6 & (1) \\ x + 5y = 13 & (2) \end{cases}$$

الحل

في هذه الحالة لدينا

$$ab' - a'b = 4 \times 5 - 1 \times (-3) = 23 \neq 0$$

فللجملة حلّ وحيد. سنعرض فيما يأتي طريقتين لإيجاد هذا الحل.

- طريقة الحذف بالتعويض

تعتمد هذه الطّريقة على حساب أحد المجهولين x أو y بدلالة الآخر. بالنّظر إلى المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ حساب x من المعادلة (2) أبسط، إذ نجد $x = -5y + 13$. نعوّض قيمة x في المعادلة (1) فنجد $4(-5y + 13) - 3y = 6$ أي $-23y + 52 = 6$ ومنه $23y = 46$ أي $y = 2$. نعوّض y بقيمتها في $x = -5y + 13$ فنجد $x = 3$. إذن الحلّ الوحيد للجملة هو $(3,2)$.

- طريقة العبارات الخطّيّة

نضرب طرفيّ المعادلة (2) بالعدد -4، فتأخذ الجملة $(\mathcal{S})$ الشكل المُكافئ الآتي:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 & (1) \\ -4x - 20y = -52 & (2) \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرفاً مع طرف فنجد $-23y = -46$ ومنه $y = 2$. نعوّض الآن قيمة y في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة (1) مثلاً فنجد $4x - 3\times 2 = 6$ ومنه $x = 3$. فالحلّ الوحيد للجملة هو $(3,2)$.



حلّ جملة معادلتين خطيّتين عندما يكون المستقيمان الموافقان متوازيين.

① حلّ جملة المعادلتين الخطيّتين $(\mathcal{S})$ الآتية :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 4x + 6y = 5 & (1) \\ 6x + 9y = 7 & (2) \end{cases}$$

② حلّ جملة المعادلتين الخطيّتين $(\mathcal{S}')$ الآتية

$$(\mathcal{S}') \quad \begin{cases} 4x + 6y = 2 & (1) \\ 6x + 9y = 3 & (2) \end{cases}$$

الحل

① لدينا في هذه الحالة $\frac{2}{3} = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ فإمّا أن يكون للجملة عددٌ غير منته من الحلول، وإمّا لا يكون لها أي حلّ. لمعرفة في أيّ الحالتين نحن نعيد صياغة الجملة $(\mathcal{S})$ بالصيغة المُكافئة التالية :

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} & (1') \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6} & (2') \end{cases}$$

تمثّل المعادلتان $(1')$ و $(2')$ معادلتي مستقيمين لهما الميل نفسه $-\frac{2}{3}$، ولكنّهما يقطعان محور التّراتيب في نقطتين مختلفتين $\left(0,\frac{7}{6}\right) \neq \left(0,\frac{5}{6}\right)$، فهذان المستقيمان متوازيان وغير طبوقين. نستنتج أن ليس للجملة $(\mathcal{S})$ أي حل.

② لدينا في هذه الحالة أيضاً $\frac{2}{3} = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ، وتكتب الجملة بالصيغة $(\mathcal{S}')$ المُكافئة الآتية :

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & (1') \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & (2') \end{cases}$$

تمثّل المعادلتان $(1')$ و $(2')$ المستقيم d نفسه، إذن للجملة مجموعة غير منتهية من الحلول هي إحداثيّات نقاط المستقيم d.

تمرينات ومسائل

1 نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونتأمّل النّقاط $A\left(5,-2\right)$ و $B\left(11,0\right)$ و $C\left(-1,6\right)$، أوجد معادلة لكلٍّ من متوسطات المثلّث ABC.

2 نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونتأمّل النّقاط $A\left(1,5\right)$ و $B\left(-1,-1\right)$ و $C\left(5,2\right)$، ونعرّف النقاط I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$، و K منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، أوجد معادلة لكلٍّ من المستقيمات (IJ) و (IK) و (KJ).

3 حلّ جمل المعادلات الآتية، واشرح النتيجة هندسيّاً.

① $\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 5 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$ ② $\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 5x - 5y &= -1 \end{aligned}\right\}$

③ $\left.\begin{aligned} 6x - y &= -7 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$ ④ $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 6x + 2y &= 10 \end{aligned}\right\}$

⑤ $\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y &= \frac{17}{36} \end{aligned}\right\}$ ⑥ $\left.\begin{aligned} \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}y &= \frac{35}{8} \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{20}y &= \frac{7}{8} \end{aligned}\right\}$

⑦ $\left.\begin{aligned} 2x\sqrt{2} - y &= 4-\sqrt{3} \\ 2y - x\sqrt{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$ ⑧ $\left.\begin{aligned} \left(1-\sqrt{2}\right)x - y &= 1 \\ x + \left(1+\sqrt{2}\right)y &= -1-\sqrt{2} \end{aligned}\right\}$

لنتعلّم البحث معاً

4 إيجاد معادلة مستقيم

نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=-2x+9$، وليكن d' المستقيم الذي معادلته $y=x+3$. يتقاطع المستقيمان d و d' في I. ويقطع d محور التراتيب في A، كما يقطع d' محور الفواصل في B. لتكن E منتصف $[AI]$، ولتكن F نظيرة النّقطة B بالنسبة إلى E. أوجد معادلة للمستقيم (IF).

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم d و d'، عيّن I ووضّع النقطتين E و F.

بحثاً عن نتائج مباشرة. كما في الهندسة، نتفحص الشكل الذي أنشأناه. النقطة E هي منتصف قطعتين مستقيمتين عيّنهما، ماذا يمكنك القول بوجه خاص عن الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{IF}$ ؟

بحثاً عن طريق. لإيجاد معادلة للمستقيم (IF)، هناك بوجه عام طريقتان : إمّا أن نحسب إحداثيّات نقطتين من هذا المستقيم، أو أن نحسب إحداثيتي نقطة منه ونعيّن شعاعاً موجّهاً له. يمكن في حالتنا التفكير قبل البدء بالحساب لاختيار الطريق الأنسب.

- يتطلّب حساب إحداثيتي النّقطة I حلّ جملة معادلتين خطيّتين، اشرح لماذا ؟
- بيّن لماذا لا نستطيع تجنّب حساب إحداثيّتي النقطة I.
- هل يمكننا الإجابة عن السؤال المطروح دون حساب إحداثيات النقطتين E و F؟

احسب إحداثيات النقاط I و A و B، ثمّ أوجد معادلة (IF).

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

5 معادلة مستقيم والوقوع على استقامة واحدة.

ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. ولتكن E نقطة تقاطع قطري شبه المنحرف، و F نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC).

أثبت، باستعمال مَعْلَم من اختيارك، أنّ المستقيم (EF) يمر بالنّقطة I منتصف $[DC]$، وبالنقطة J منتصف $[AB]$.


نحو الحلّ

رسم الشّكل. لا تواجهنا أية صعوبة برسم الشكل، يمكن إنشاء جميع النّقاط انطلاقاً من A و B و C و D. لذلك نختار مَعْلَماً تكون فيه إحداثيّات هذه النّقاط بسيطة. نختار مثلاً المَعْلَم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

بحثاً عن نتائج مباشرة. أوجد إحداثيّات النّقاط A و B و D، في المَعلَم الذي اخترناه. ثُم احسب بالاستفادة من الفرْض : $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$، إحداثيتي النقطة C.

بحثاً عن طريق. نهدف إلى إثبات أنّ المستقيم (EF)، يمرّ بالنّقطتين I و J. لتحقيق ذلك يمكننا إيجاد معادلة للمستقيم (EF) ثُمّ نتوثّق أنّ إحداثيّات كلٍّ من I و J تُحقّق هذه المعادلة.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 معادلة مستقيم والناظر بالنسبة إلى نقطة

نزوِّد المستوي بمَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x+6$، ولتكن النّقطة $A(2,2)$. أعطِ معادلة للمستقيم d' نظير المستقيم d بالنّسبة إلى النّقطة A.

نحو الحلّ

- **رسم الشكل.** ارسم المستقيم d، ثُمّ وضِّع النقطة A وأنشئ المستقيم d'.
- **بحثاً عن نتائج مباشرة.** استناداً إلى الفرْض d' نظير المستقيم d بالنسبة إلى النقطة A. عيِّن مَيل المستقيم d.
- **بحثاً عن طريق.** نهدف إلى إيجاد معادلة للمستقيم d'، بيِّن لماذا يمكننا أن نأخذها من الشّكل $y=mx+p$، العدد m معلوم. يكفي إذن أن نعيِّن إحداثيتي نقطة ما من d'، ولكنّ نقاط هذا المستقيم هي نظائر نقاط المستقيم d بالنسبة إلى A. اختر نقطةً مناسبة من d واحسب إحداثيتي نظيرتها بالنّسبة إلى النقطة A.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 مساحات السطوح، وحلّ المعادلات

مساحة المستطيل في الشكل المجاور 60 سنتيمتراً مربّعاً، ومجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً. أوجد بُعدي المستطيل.

نحو الحلّ

- **رسم الشّكل.** ارسم الشكل بعناية، وضع العلامات المعتادة التي تدل على القطع المستقيمة المتساوية الطّول.
- **التعبير عن الفرضيّات.** «مساحة المستطيل 60 سنتيمتراً مربّعاً». للتعبير عن هذه الخاصّة نضع x للدلالة على طول المستطيل، ونضع y للدلالة على عرضه. فيكون $xy=60$. عبِّر بأسلوب مماثل عن الخاصّة : «مجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً».
- **بحثاً عن طريق.** بالنظر إلى نتائج الفقرة السابقة نرى أنّ المطلوب تعيين عددين عُرف جداء ضربهما ومجموع مربعيهما. يمكننا مثلاً أن نفكِّر بتعويض $y=\frac{60}{x}$ في المعادلة الثانية. هل تستطيع حلَّ المعادلة الناتجة؟ ويمكننا أيضاً أن نتبع طريقة أخرى، إذا لاحظنا أن الحدَّين x^2+y^2 و xy يظهران عند نشر $(x+y)^2$. احسب $x+y$، وكذلك $x-y$.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 المستقيمات المتلاقية

نزوِّد المستوي بمَعْلَم $(O;\vec{i},\vec{j})$. ونتأمّل النّقاط $A(3,0)$ و $B(3,4)$ و $C(0,4)$، ثُمّ نعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمات (AC) و (IB) و (OJ) تتلاقى في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

- **رسم الشّكل**. ارسم الشّكل بعناية، موضّعاً النّقاط A و B و C ثُمّ I و J.
- **بحثاً عن نتائجَ مباشرة**. أعطِ إحداثيّات I و J.
- **بحثاً عن طريق**. نهدف إلى إثبات تلاقي ثلاثة مستقيمات. لتحقيق ذلك يمكننا تعيين نقطة تقاطع مستقيمين منها، ثُمّ نبرهن أنّ المستقيم الثّالث يمرّ بهذه النّقطة. اكتب معادلة لكلٍّ من المستقيمات الثّلاثة.

أنجِزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

حلٌّ آخر

لا يجب أن يمنعنا وجود مَعْلَم مفروض في نص المسألة من التفكير بحلٍّ هندسي بسيطٍ يريحنا من إجراء حسابات طويلة.

- لأنّ I و J هما منتصفا قطعتين مستقيمتين، يمكن أن ننظر إلى $[BI]$ و $[OJ]$ بصفتهما متوسِّطين في مثلّث. عيِّن هذا المثلّث، وارمز بالرّمز G إلى نقطة تقاطع هذين المتوسطين.
- كي نثبت أنّ (AC) يمرّ بالنقطة G يكفي أن نثبت أنّه المتوسط الثالث.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة

9 الفرق بين عددين x و y يساوي 14، أمّا الفرق بين مربّعيهما فيساوي 616. احسب هذين العددين.

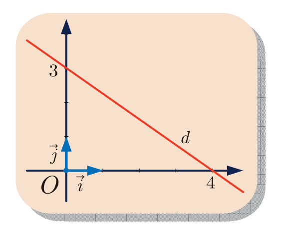
10 x و y عددان. الفرق بين مقلوبيهما 6، والفرق بين مربّعي مقلوبيهما يساوي 12. احسب هذين العددين.

11 الفرق بين عددين x و y يساوي 6، أمّا جداء ضربهما فيساوي 216. احسب هذين العددين.

12 احسب بُعدَي حقل مستطيل مساحته 120 متراً مربّعاً، ومحيطه 44 متراً.

13 احسب أطوال أضلاع مثلّث متساوي السّاقين ABC رأسه A، ومحيطه 36 سنتيمتراً، وطول ارتفاعه النازل من A يساوي 12 سنتيمتراً.

14 نزوِّد المستوي بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تأمّل الشّكل المجاور ثُمّ أجب عمّا يأتي :



① أوجد معادلة للمستقيم d.

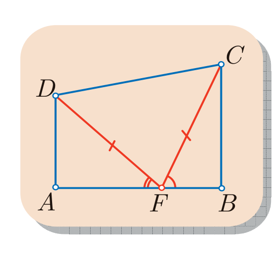
② أوجد معادلة للمستقيم d_1 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور الفواصل.

③ أوجد معادلة للمستقيم d_2 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور التراتيب.

④ أوجد معادلة للمستقيم d_3 نظير المستقيم d بالنسبة إلى المبدأ O.

15 سأل رجلٌ صديقَه عن عمره فأجابه : «عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك، وعندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة». فكم عمر كلٍّ من الصّديقين؟

16 ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه الزاويتان $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمتان. نفترض أنّ $AD=3$ و $BC=4$ و $AB=5$ وجميع الأطوال مُقاسة بالمتر. نختار نقطة F من القطعة المستقيمة $[AB]$ تُحقّق $DF=FC$. احسب AF.



17 ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. ولتكن M نظيرة النقطة O بالنّسبة إلى D، و K نظيرة C بالنّسبة إلى B. وأخيراً نرمز بالرّمز I إلى مركز ثقل المثلّث ADB.

① ليكن $(A;\vec{i},\vec{j})$ المَعْلَم المتجانس الذي فيه $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$. أوجد إحداثيّات النقاط A و B و C و D و O و M و K و I.

② يقطع المستقيمُ (MI) المستقيمَ (AB) في Q، ويقطع المستقيمُ (MC) المستقيمَ (AD) في P. نريد إثبات وقوع النقاط K و Q و P على استقامة واحدة.

- اكتب معادلة للمستقيم (MI) واستنتج إحداثيّتي النقطة Q.
- اكتب معادلة للمستقيم (MC) واستنتج إحداثيّتي النقطة P.
- أثبت أنّ النقاط K و Q و P تقع على استقامة واحدة.